

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

СОГЛАСОВАНА

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель образовательной программы

Декан физико-математического факультета

_____/проф. И.А.Танкиев
от «27» февраля 2025г.

_____/Б.С. Кульбужев
от «14» марта 2025г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.04.01 Дифференциальные уравнения в прикладных задачах естествознания

Направление подготовки

01.03.01 –МАТЕМАТИКА

Квалификация выпускника

БАКАЛАВР

Форма обучения

Очная

Магас, 2025г.

1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Дифференциальные уравнения в прикладных задачах естествознания» рассматривает использование современной теории и практики дифференциальных уравнений для решения прикладных задач естествознания.

Целью дисциплины является изучение основных математических моделей, применяющихся в различных разделах современной биологии, медицины, экологии, физики, теоретической механики и т.д., подготовка студентов в области исследования сложных систем и процессов на основе методов математического моделирования, с применением дифференциальных уравнений и их систем.

Перечень профессиональных стандартов, обобщенных трудовых функций и трудовых функций, соответствующих профессиональной деятельности выпускников

Наименование документа	Код	Наименование базовой группы, должности (профессии) или специальности
ОКЗ	2320	Преподаватели в средней школе
	2340	Преподаватели в системе специального образования

Код и наименование профессионального стандарта	Обобщенные трудовые функции			Трудовые функции		
	Код	Наименование	Уровень квалификации	Наименование	Код	Уровень (подуровень) квалификации
01.001 Педагог (педагогическая деятельность в дошкольном, начальном общем, основном общем, среднем общем образовании) (воспитатель, учитель)	А	Педагогическая деятельность по проектированию и реализации образовательного процесса образовательных организациях дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования	6	Общепедагогическая функция. Обучение	А/01.6	6
				Воспитательная деятельность	А/02.6	6
				Развивающая деятельность	А/03.6	6
	В	Педагогическая деятельность по проектированию и реализации основных общеобразовательных программ	6	Педагогическая деятельность по реализации программ основного и среднего общего образования	В/03.6	6

Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата

Дисциплина относится к блоку 1: «Дисциплины(модули)». К части, формируемая участниками образовательных отношений. Читается во 2 семестре. Находится под индексом Б1.В.ДВ.04.01.

3. Результаты освоения дисциплины (модуля) Дифференциальные уравнения в прикладных задачах естествознания

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование элементов следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению:

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикатор достижения компетенции (закрепленный за дисциплиной)
УК-1	Способен осуществлять поиск, критический анализ информации, применять системный подход для решения поставленных задач.	УК-1.1. Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие; УК-1.2. Определяет, интерпретирует и ранжирует информацию, требуемую для решения поставленной задачи; УК-1.3. Осуществляет поиск информации для решения поставленной задачи по различным типам запросов; УК-1.4. При обработке информации отличает факты от мнений, интерпретаций, оценок, формирует собственные мнения и суждения, аргументирует свои выводы и точку зрения; УК-1.5. Рассматривает и предлагает возможные варианты решения поставленной задачи, оценивая их достоинства и недостатки.
ПК-1	Способен определить общие формы и закономерности отдельной предметной области	ПК-1.1: Знает особенности современного этапа развития образования в мире, этапы развития математики. ПК-1.2: Умеет системно анализировать информацию, сопоставлять, делать выводы ПК-1.3: Владеет современными методами, методологией научно-исследовательской деятельности в области математики, демонстрирует понимание общей структуры данной дисциплины.

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единиц, 180 часов.

Вид учебной работы	Всего	Порядковый номер семестра			
		8			
Общая трудоемкость дисциплины всего (в з.е.), в том числе:	5 з.е.	5 з.е.			
Курсовой проект (работа)	46	46			
Аудиторные занятия всего (в акад. часах), в том числе:	92	92			
Лекции	48	48			
Практические занятия, семинары	44	44			
Лабораторные работы	-	-			
Самостоятельная работа всего (в акад. часах), в том числе:	61	61			
КСР	-	-			
Экзамен	27	27			
Общая трудоемкость дисциплины	180	180			

№/ №	Наименование разделов и тем дисциплины (модуля)	семестр	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)								Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра). Формы промежут. аттест							
			Аудиторная работа					Самостоятельная работа										
			всего	лекции	Практ. занятия	Лаборат. занятия	Др. виды контакт. раб.	Всего	Курсов. раб(.проект)	Подготовка к экз.	Другие виды	Собеседование	Колоквиум	Проверка тестов	Проверка контр.раб	Проверка реферата	Проверка эссе и	Курсовая работа
	Раздел 1. Дифференциальные уравнения в биологии и экологии.			24	24			24										
1.1	Дифференциальные уравнения в экологии. Основные типы диф. уравнений и их приложения к составлению математических моделей биологических задач.			2	2			2										
1.2	Модель взаимодействия Вольтерра. Модель конкурентного взаимодействия двух видов .Модель хищник - жертва. Нормирование выбросов вредных веществ.			2	2			2										
1.3	Динамика популяций. Взаимодействие популяций.			2	2			2										

	их системы в задачах гидродинамики. Модели гидродинамики. Движение рыб. Динамика крови.																	
2.4	Дифференциальные уравнения в химии. Скорость реакции. Кинетические уравнения. Каталитические процессы. Необратимая реакция определенного порядка.			4	4			4										
	Раздел 3. Дифференциальные уравнения в частных производных.			12	12			17										
3.1	Классические задачи физики решаемые с помощью уравнений в частных производных. Кривая погони. Задача о брахистохроне. Кривизна плоских кривых. Уравнение цепной линии. Второй закон Ньютона.			2	2			4										
3.2	Закон всемирного тяготения. Механические колебания. Нелинейный математический маятник. Колебания в электрических цепях. Уравнение колебаний струны. Уравнение колебаний мембраны. Задача о распределении тепла в стержне.			2	2			4										
3.3	Модели гидродинамики. Дифференциальные уравнения и их системы в задачах гидродинамики. Модели гидродинамики. Движение рыб. Динамика крови.			4	4			4										
3.4	Дифференциальные уравнения в химии. Скорость реакции. Кинетические уравнения. Каталитические процессы. Необратимая реакция определенного порядка.			4	4			5										
Общая трудоемкость, в часах		8	180	48	44	-	-	61	-			Промежуточная аттестация						
												Форма						
												Зачет						
												Зачет с оценкой						
												Экзамен/курсовая работа						

4.2. Содержание дисциплины (модуля)

Раздел 1. Дифференциальные уравнения в биологии и экологии.

Тема 1.1. Дифференциальные уравнения в экологии. Основные типы диф. уравнений и их приложения к составлению математических моделей биологических задач.

Тема 1.2. Модель взаимодействия Вольтерра. Модель конкурентного взаимодействия двух видов. Модель хищник - жертва. Нормирование выбросов вредных веществ.

Тема 1.3. Динамика популяций. Взаимодействие популяций. Конкуренция. Модели Хэснела. Гипотеза Вольтерра.

Тема 1.4. Периодические процессы .Колебания в биологических системах. Биологические часы. Модели сердца.

Тема 1.5. Стохастический резонанс в биологии .Понятия автоколебаний .Бифуркация Андронова- Хопфа. Модель брусцеллятор.

Тема 1.6. Модели распространения эпидемии и иммунных реакций. Анализ распространения безыммунной эпидемии. Модели развития эпидемии с приобретенным иммунитетом .Математическая модель динамики иммунных реакций. Математические модели в вирусологии.

Тема 1.7. Нелинейные волны. Модель нервного импульса. Нелинейная модель антипорта ионов. Мультистационарная модель. Автоколебательная модель. Динамический хаос.

Тема 1.8. Моделирование микробных популяций. Микробные популяции как объект моделирования и управления. Непрерывная культура микроорганизмов. Модель Моно. Двухвозрастная модель .Непрерывные возрастные распределения.

Раздел 2. Дифференциальные уравнения в частных производных.

Тема 2.1. Классические задачи физики решаемые с помощью уравнений в частных производных. Кривая погони. Задача о брахистохроне. Кривизна плоских кривых. Уравнение цепной линии. Второй закон Ньютона.

Тема 2.2. Закон всемирного тяготения. Механические колебания. Нелинейный математический маятник .Колебания в электрических цепях. Уравнение колебаний струны. Уравнение колебаний мембраны. Задача о распределении тепла в стержне.

Тема 2.3. Модели гидродинамики. Дифференциальные уравнения и их системы в задачах гидродинамики. Модели гидродинамики. Движение рыб. Динамика крови.

Тема 2.4. Дифференциальные уравнения в химии. Скорость реакции. Кинетические уравнения. Каталитические процессы. Необратимая реакция определенного порядка.

Раздел 3. Элементы качественной теории дифуравнений.

Тема 3.1. Элементы качественной теории дифуравнений. Непрерывные и дискретные модели. Системы дифференциальных уравнений как модели биологических процессов. Устойчивость динамических систем. Модели Мальтуса и Ферхюльста.

Тема 3.2. Исследование устойчивости стационарных состояний систем. Уравнения Лотки и Вольтерра .Стационарные состояния систем. Устойчивость по Ляпунову. Метод Ляпунова линеаризации систем в окрестности стационарного состояния.

Тема 3.3. Устойчивость состояний динамических систем задач медицины. Модели морфогенеза. Рост колоний микробов. Рост раковой опухоли.

Тема 3.4. Модель лимфоцитарного хориоменингита .Модель Велдона (лейкемии).Модель Оттесена (сердечно-сосудистой системы)

Темы лабораторных работ (Лабораторный практикум)

Не предусмотрены учебным планом ООП

Примерная тематика курсовых работ

1. Разностные методы решения дифференциальных уравнений
2. Решение систем дифференциальных уравнений методом Адамса
3. Численные методы при решении дифференциальных уравнений. Численное интегрирование. Формула прямоугольников.

4. Решение систем дифференциальных уравнений методом Эйлера
5. Расчет полета снаряда
6. Решение систем дифференциальных уравнений методом прогноза и коррекции
7. Численные методы. Приближенные вычисления. Интерполирование функций. Применение численных методов.

5. Образовательные технологии

Активные и интерактивные формы: лекции, практические занятия, контрольные работы, коллоквиумы, зачеты и экзамены. В течение семестров студенты решают задачи, указанные преподавателем.

6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.

6.1. План самостоятельной работы студентов

№ п/п	Наименование раздела (темы)	Вид самостоятельной работы	Трудоемкость (в академических часах)
Раздел 1	Дифференциальные уравнения в биологии и экологии.		24
1.1	Дифференциальные уравнения в экологии. Основные типы диф. уравнений и их приложения к составлению математических моделей биологических задач.	Аудиторная работа	
1.2	Модель взаимодействия Вольтерра. Модель конкурентного взаимодействия двух видов .Модель хищник - жертва. Нормирование выбросов вредных веществ.	Аудиторная работа	
1.3	Динамика популяций. Взаимодействие популяций. Конкуренция. Модели Хэснела. Гипотеза Вольтерра.	Теоретический тест	
1.4	Периодические процессы .Колебания в биологических системах. Биологические часы. Модели сердца.	Аудиторная работа	
1.5	Стохастический резонанс в биологии .Понятия автоколебаний .Бифуркация Андронова- Хопфа. Модель брюсцеллятор.	Аудиторная работа	
1.6	Модели распространения эпидемии и иммунных реакций. Анализ распространения	Аудиторная работа	

	<p>безыммунной эпидемии.</p> <p>Модели развития эпидемии с приобретенным иммунитетом</p> <p>.Математическая модель динамики иммунных реакций.</p> <p>Математические модели в вирусологии.</p>		
1.7	<p>Нелинейные волны. Модель нервного импульса. Нелинейная модель антипорта ионов.</p> <p>Мультистационарная модель.</p> <p>Автоколебательная модель.</p> <p>Динамический хаос.</p>	Аудиторная работа	
1.8	<p>Моделирование микробных популяций. Микробные популяции как объект моделирования и управления.</p> <p>Непрерывная культура микроорганизмов. Модель Моно. Двухвозрастная модель</p> <p>.Непрерывные возрастные распределения.</p>	Контрольная работа	
Раздел 2	Дифференциальные уравнения в частных производных.		16
2.1	<p>Классические задачи физики решаемые с помощью уравнений в частных производных. Кривая погони.</p> <p>Задача о брахистохроне.</p> <p>Кривизна плоских кривых.</p> <p>Уравнение цепной линии.</p> <p>Второй закон Ньютона.</p>	Аудиторная работа	
2.2	<p>Закон всемирного тяготения.</p> <p>Механические колебания.</p> <p>Нелинейный математический маятник .Колебания в электрических цепях.</p> <p>Уравнение колебаний струны.</p> <p>Уравнение колебаний мембраны. Задача о распределении тепла в стержне.</p>	Аудиторная работа	
2.3	<p>Модели гидродинамики.</p> <p>Дифференциальные уравнения</p>	Аудиторная работа	

	и их системы в задачах гидродинамики. Модели гидродинамики. Движение рыб. Динамика крови.		
2.4	Дифференциальные уравнения в химии. Скорость реакции. Кинетические уравнения. Каталитические процессы. Необратимая реакция определенного порядка.	Контрольная работа	
Раздел 3	Раздел 3. Элементы качественной теории дифуравнений.		17
3.1	Элементы качественной теории дифуравнений. Непрерывные и дискретные модели. Системы дифференциальных уравнений как модели биологических процессов. Устойчивость динамических систем. Модели Мальтуса и Ферхюльста.	Аудиторная работа	
3.2	Исследование устойчивости стационарных состояний систем. Уравнения Лотки и Вольтерра .Стационарные состояния систем. Устойчивость по Ляпунову. Метод Ляпунова линеаризации систем в окрестности стационарного состояния.	Аудиторная работа	
3.3	Устойчивость состояний динамических систем задач медицины. Модели морфогенеза. Рост колоний микробов. Рост раковой опухоли.	Аудиторная работа	
3.4	Модель лимфоцитарного хориоменингита .Модель Велдона (лейкемии).Модель Оттесена (сердечно-сосудистой системы)	Контрольная работа	

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Критерии оценки промежуточной аттестации в форме зачета

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме зачета
«Зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Не зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

Критерии оценки промежуточной аттестации в форме экзамена

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме экзамена
«Отлично»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов, системно и глубоко, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены безупречно, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Хорошо»	Теоретическое содержание курса освоено в целом без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Удовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено большей частью, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.

«Неудовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.
-----------------------	--

6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа является одним из видов учебной деятельности обучающихся, способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Аудиторная самостоятельная работа по учебной дисциплине осуществляется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя без его непосредственного участия.

Виды заданий для внеаудиторной самостоятельной работы, их характер, учитывать специфику изучаемой учебной дисциплины, индивидуальные особенности обучающегося.

Контроль самостоятельной работы и оценка ее результатов организуется как единство двух форм:

1. самоконтроль и самооценка обучающегося;
2. контроль и оценка со стороны преподавателя.

Организация и руководство аудиторной самостоятельной работы

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Основными видами аудиторной работы самостоятельной работы являются:

- выполнение лабораторных и практических работ осуществляется на лабораторных и практических занятиях в соответствии с графиком учебного процесса. Для обеспечения самостоятельной работы преподавателями разрабатываются методические указания по выполнению лабораторной /практической работы.

Работа с литературой, другими источниками информации, в т.ч. электронными, может реализовываться на семинарских и практических занятиях. Данные источники информации могут быть представлены на бумажном и/или электронном носителях, в том числе, в сети Интернет.

Преподаватель формулирует цель работы с данным и источником информации, определяет время на проработку документа и форму отчетности.

Само и взаимопроверка выполненных заданий чаще всего используется на семинарском, практическом и других видах занятий. Проблемная /ситуационная задача должна иметь четкую формулировку, к ней должны быть поставлены вопросы, ответы на которые необходимо найти и обосновать. Критерии оценки правильности решения проблемной/ситуационной задачи должны быть известны всем обучающимся.

Организация и руководство внеаудиторной работы

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

При предъявлении видов заданий на внеаудиторную самостоятельную работу рекомендуется использовать дифференцированный подход к уровню подготовленности обучающегося. Перед выполнением внеаудиторной самостоятельной работы преподаватель проводит консультацию с определением цели задания, его содержания, сроков выполнения, ориентировочного объема работы, основных требований к результатам работы, критериев

оценки, форм контроля и перечня литературы. В процессе консультации преподаватель предупреждает о возможных типичных ошибках, встречающихся при выполнении задания.

Для методического обеспечения и руководства самостоятельной работой в образовательном учреждении разрабатываются учебные пособия, методические рекомендации по самостоятельной подготовке к различным видам занятий с учетом специальности учебной дисциплины, особенностей контингента студентов, объема и содержания самостоятельной работы, форм контроля и т.п.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня подготовленности обучающихся.

Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы могут быть:

- для овладения знаниями: чтения текста; составления плана текста; графическое изображение структуры текста; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочникам; учебно-исследовательская работа; использование аудио и видеозаписей, компьютерной техники и Интернет ресурсов и др.;

- для закрепления и систематизации знаний: работа с конспектом лекции; повторная работа над учебным материалом; составление плана, тезисов ответа; составление таблиц, ребусов, кроссвордов, глоссария для систематизации учебного материала; изучение словарей, справочников; ответы на контрольные вопросы; аналитическая обработка текста; подготовка сообщений к выступлению на семинаре, конференции; подготовка рефератов, докладов; составление биографий, заданий в тестовой форме и др.

- для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; составление схем; решение ситуационных производственных задач; подготовка к деловым и ролевым играм; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности, подготовка презентаций, творческих проектов; подготовка курсовых и выпускных работ; опытно-экспериментальная работа; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности и др.

Для обеспечения внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине преподавателем разрабатывается перечень заданий для самостоятельной работы, который необходим для эффективного управления данным видом учебной деятельности обучающихся.

Преподаватель осуществляет управление самостоятельной работой, регулирует ее объем на одно учебное занятие и осуществляет контроль выполнения всеми студентами группы. Для удобства преподаватель может вести ведомость учета выполнения минимума заданий, необходимые для допуска к итоговой аттестации по дисциплине.

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Студент самостоятельно определяет режим своей внеаудиторной работы и меру труда, затрачиваемого на овладение знаниями и умениями по каждой дисциплине, выполняет внеаудиторную работу по индивидуальному плану, в зависимости от собственной подготовки, бюджета времени и других условий.

Ежедневно студент должен уделять выполнению внеаудиторной самостоятельной работы в среднем не менее 3 часов.

При выполнении внеаудиторной самостоятельной работы студент имеет право обращаться к преподавателю за консультацией с целью уточнения задания, формы контроля выполненного задания.

6.3. Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов

Вопросов к экзамену:

1. Особенности систем и задач естествознания и как объектов математического моделирования.
2. Кинетические уравнения в химии
3. Уравнения материального баланса в химии
4. Экстремум.
5. Дифуравнение экспоненциального роста.
6. Уравнение Лапласа.
7. Уравнение Пуассона.
8. Уравнение Неймана.
9. Частично изолированные популяции
10. Модель Оттесена.
11. Устойчивость систем дифуравнений.
12. Дифференциальные уравнения в экологии
13. Модель "хищник - жертва"
14. Модели биологической динамики на основе точечных отображений
15. Диаграмма Ламеррея
16. Элементы качественной теории дифференциальных уравнений
17. Дифференциальные уравнения в частных производных
18. Модели морфогенеза
19. Рост колоний микробов
20. Рост ареала популяции
21. Рост раковой опухоли
22. Устойчивое развитие биологических систем.
23. Периодические процессы
24. Биологические часы
25. Модели сердца

26. Стохастический резонанс в биологии
27. Модели гидродинамики
28. Движение рыб
29. Динамика крови
30. Нелинейные волны

Примерные задания для контрольных работ

Дифференциальные уравнения первого порядка

1. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения $2(y + y') = x + 2$.

2. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными

1. $(x^3 + 2x)y^2 dy = x dx$; 2. $dy = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} dx$; 3. $\frac{y'}{y} = x \cos^2 y$;

4. $y'x^2 e^y = e^{-y}$, $y(1) = 0$; 5. $2(x + y)dy + (3x + 3y - 1)dx = 0$, $y(0) = 2$.

3. Решить однородные уравнения

1. $x^2 y' - y^2 = 2x^2$; 2. $xy' = y(\ln y - \ln x)$; 3. $xydy - y^2 dx = (x + y)^2 e^{-y/x} dx$;

4. $y' = \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}$; 5. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$, $y(0) = 1$.

4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным

1. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$; 2. $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$; 3. $xy' = y + x^2 \cos x$;

4. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$, $y(2) = 1,5$; 5. $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x$, $y(0) = 1$.

5. Решить уравнение Бернулли

1. $y' = x^3 y^3 - xy$; 2. $xy + 2y = x^5 y$; 3. $2(xy' + y) = y^2 \ln x$, $y(1) = 2$.

6. Решить уравнение в полных дифференциалах

1. $(y + \frac{1}{x^2})dx + (x + \frac{1}{y^2})dy = 0$; 2. $\frac{3x^2 + y}{y^2} dx = \frac{2x^3 + xy + 2y^3}{y^3} dy$.

7. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0.$$

8. Определить тип уравнения и указать способ его решения:

1. $xy' - xe^{x/y} = 2$; 2. $xydx + (x + 1)dy = 0$; 3. $xy' + 3xy^3 = 2y$;

4. $dy + (3y - e^{3x})dx = 0$; 5. $(x^3 + y^2)dx + 2xydy = 0$.

9. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

1. $(xy^2 + x)dx + (y^3 - x^3 y^3)dy = 0$; 2. $xy' + y = y^2$; 3. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$;

4. $y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)$; 5. $xe^{y^2} dx + (x^2 ye^{y^2} + y^2 y)dy = 0$.

10. Решить задачу Коши

1. $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2}{1+x^2}$, $y(0) = -\frac{2}{3}$; 2. $3y' + 2xy = 2xy e^{-2x^2}$, $y(0) = 1$;

3. $ydx = (3y \cos 2y - 2y^2 \sin 2y - x)dy$, $y(16) = \pi$.

11. Решить уравнения

1. $y = x + y' - \ln y$; 2. $x[(y')^2 - 1] = 2y$; 3. $y = xy' - (y')^2$.

Дифференциальные уравнения высших порядков

1. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $y'' + 2xy' = 0$; 2. $(y-1)y'' = 2(y')^2$;

3. $y''' + 3y'y'' = 0$; 4. $yy'' = 2x(y')^2$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 0,5$.

1. Найти общее решение уравнения

1. $y'' - 2y' + 4y = 0$; 2. $y'' + 6y' + 9y = 0$; 3. $y'' + 4y = 0$.

2. Решить задачу Коши

1. $3y'' - 2y' - 8y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$; 2. $y'' + \frac{\pi}{4}y = \frac{\pi}{4}$, $y(0) = 2$, $y(\frac{\pi}{4}) = 1$.

3. Найти общее решение уравнения

$$2y'' + y' - y = f(x),$$

если

1. $f(x) = 3x^2 - 1$; 2. $f(x) = 3e^{-x}$; 3. $f(x) = 2\sin x$; 4. $f(x) = e^x \cos 2x$.

4. Найти решение задачи Коши

$$y'' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}x, \quad y(\frac{\pi}{4}) = 2, \quad y'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$$

методами Лагранжа и Коши.

5. Найти общее решение

1. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x$; 2. $y^{(4)} - y''' = 5(x+2)^3$;

3. $(4x+3)^2 y'' + (4x+3)y' - 16y = 0$; 4. $x^2 y'' - 3xy' + 3y = -\ln x$.

Системы дифференциальных уравнений

1. Найти решения линейных систем

$$1) \begin{cases} \dot{x} = -8x + 4y \\ \dot{y} = 3x - 4y \end{cases} \quad . \quad 2) \begin{cases} \dot{x} = 6x + 5y \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases} \quad , \quad \begin{matrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 1. \end{matrix}$$

$$3) \begin{cases} \dot{x} = 5x - 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases} \quad . \quad 4) \begin{cases} \dot{x} = 6x + 4y + 2t \\ \dot{y} = -x + 10y - 1 \end{cases} \quad .$$

2. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x' = -4x + y, \\ y' = -6x + y + \frac{1}{1+e^{2t}}. \end{cases}$$

3. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) две системы дифференциальных уравнений $\vec{x}' = A\vec{x}$, где

$$1) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 1, \quad 2) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_1 = -2, \\ \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \lambda_3^2 = 5; \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \lambda_3^2 = 2.$$

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

4. Решить систему дифференциальных уравнений

$$x'' - y'' + y' + x - 3y = 0,$$

$$4y'' - 2x'' - x' - 2x + 5y = 0.$$

Образцы контрольных заданий

Контрольная работа по теме

«Дифференциальные уравнения превого порядка»

Вариант № 1

I. Определить тип и найти общие решения данных уравнений:

$$1. (y + y \ln x)dx - (x - xy)dy = 0.$$

$$2. y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}.$$

$$3. (xy^2 + \frac{x}{y^2})dx + (x^2y - \frac{x^2}{y^3})dy = 0.$$

II. Найти частные решения

$$1. \quad xy' - y = x \operatorname{tg} \left(\frac{y}{x} \right), \quad y(1) = 1.$$

$$2. \quad e^y dx = (2y - xe^y) dy, \quad y(-1) = 0.$$

Контрольная работа по теме

«Дифференциальные уравнения высших порядков»

Вариант №1

I. Определить тип и найти общие решения данных уравнений:

$$1. \quad y' = y' + x.$$

$$2. \quad y' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2}.$$

II. Решить задачу Коши:

$$1. \quad yy' + (y')^2 = 0. \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1.$$

$$2. \quad y' - y' = e^{-x} + 2x. \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Задания для построения моделей:

1. Экспоненциальный рост популяции (решение уравнения, график временной зависимости для численности)
2. Логистический рост (решение уравнения, график временной зависимости для численности, анализ устойчивости стационарных состояний)
3. Модель популяции с наименьшей критической численностью (график временной зависимости для численности, анализ устойчивости стационарных состояний)
4. Дискретное логистическое уравнение. Лестница Ламерея (построение временной зависимости для численности по графику зависимости, анализ устойчивости положения равновесия)
5. Система линейных химических реакций (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)
6. Модель Лотки (модель химической реакции) (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)
7. Классическая модель Вольтерра «хищник-жертва» (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)
8. Модель отбора одного из равноправных (общая модель для двух видов и модель, учитывающая ограниченность в питательных ресурсах и быстрое их поглощение по

сравнению с процессами репродукции) (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)

9. Модель конкуренции (с учетом внутривидовой конкуренции) (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)

10. Модель «хищник-жертва» (с учетом внутривидовой конкуренции) (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)

11. Модель биохимической регуляции белкового синтеза (генетический триггер Жакоба и Моно) (для $m = 0$ определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)

12. Брюсселятор (определение стационарных состояний, определение типа устойчивости стационарных состояний в зависимости от значений параметров системы, вид фазового портрета в зависимости от значений параметров системы)

13. Модель гликолиза (упрощенная схема) (определение стационарных состояний, определение типа устойчивости стационарных состояний в зависимости от значений параметров системы, вид фазового портрета в зависимости от значений параметров системы)

Примерная тематика курсовых работ

1. Разностные методы решения дифференциальных уравнений
2. Решение систем дифференциальных уравнений методом Адамса
3. Численные методы при решении дифференциальных уравнений. Численное интегрирование. Формула прямоугольников.
4. Решение систем дифференциальных уравнений методом Эйлера
5. Расчет полета снаряда
6. Решение систем дифференциальных уравнений методом прогноза и коррекции
7. Численные методы. Приближенные вычисления. Интерполирование функций. Применение численных методов.

Контроль освоения компетенций

№ п\п	Вид контроля	Контролируемые разделы	Компетенции, компоненты которых контролируются
1	Аудиторная контр. работа (пров	Раздел 1- Раздел 3	УК-1, ПК-1

	ерка и оценка)		
2	Теоретический тест	Раздел 1	УК-1, ПК-1
3	Самостоятельное решение практических заданий (аудиторная)	Раздел 1- Раздел 3	УК-1, ПК-1
5	экзамен в 1 семестре	Раздел 1 - Раздел 1	УК-1, ПК-1

7. Учебно-методическое и материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля) дифференциальные уравнения в прикладных задачах естествознания

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля) дифференциальные уравнения в прикладных задачах естествознания.

К основной (обязательной) литературе относятся учебники, учебные пособия, учебно-методическая литература и монографии, изучение которых является обязательным для овладения знаниями в полном объеме по дисциплине в соответствии с данной программой. К основной, прежде всего, относится литература, имеющая гриф Министерства образования и науки Российской Федерации или Учебно-методического объединения, рекомендующих издание к использованию в учебном процессе. В списке основной литературы указывается не более пяти источников, имеющихся в достаточном количестве в фонде библиотеки. Если доступна электронная версия учебников, учебных пособий и т.д., следует указать для них режим доступа.

К дополнительной относится литература, рекомендуемая бакалаврам, магистрам для самостоятельного изучения при выполнении курсового проекта (работы), учебной научно-исследовательской работы, при написании рефератов, для подготовки к семинарам, практическим занятиям, лабораторным работам и другим учебным занятиям, а также для углубления и расширения знаний по данной дисциплине.

Все источники в основной и дополнительной литературе даются с полными библиографическими описаниями в соответствии с российским или западным стандартами оформления.

Для магистратуры обязательно наличие литературы на английском языке.

7.1. Учебная литература:

Основная литература:

1. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. - М. Высшая школа, 1962.
2. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. - М. ГИТТЛ, 1952.

3. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: УРСС, 1998.
4. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1983.
5. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во МГУ, 1984.
6. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. – М.: Физматлит, 2002.
7. *Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В.* Дифференциальные уравнения. – М.: МГТУ, 2004.

Дополнительная литература

1. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике. – М.: В.Ш., 1994.
2. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: РХД, - 2000.
3. *Краснов М.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения (учебное пособие). – М.: В.Ш., 1983. – 127.
4. *Васильева А.Б., Медведев Г.Н., Тихонов Н.А., Уразгильдина Т.А.* Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах. – М.: Физматлит, 2003.
5. *Матвеев Н.М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Мн.: Высшая школа, 1987.
6. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1980.

7.2. Интернет-ресурсы

1. Федеральный портал <http://edu.ru>
2. Электронные каталоги Научной библиотеки ДГУ <http://elib.dgu.ru>

7.3. Программное обеспечение:

1. Microsoft Excel
2. Microsoft Word
3. Microsoft PowerPoint

7.4. Материально-техническое обеспечение

В организации учебного процесса необходимыми являются средства, обеспечивающие аудиовизуальное восприятие учебного материала (специализированное демонстрационное оборудование):

1. Доска и мел (или более современные аналогии)
2. компьютерные и мультимедийные технологии
3. микрофон и соответствующие установки (для работы в больших аудиториях с многочисленными группами студентов)

Рабочая программа дисциплины **Дифференциальные уравнения в прикладных задачах естествознания** составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки **01.03.01 Математика** (уровень высшего образования бакалавриат), утвержденного Приказом Министерства образования и науки РФ от 10 января 2018 г. N 8 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования - бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика".

Программу составил:

Профессор, зав.кафедрой «Математический анализ», к.ф.-м.н. Танкиев И.А.

Программа одобрена на заседании кафедры «Математический анализ» Протокол № 6 от «27» февраля 2025г

Программа одобрена Учебно-методическим советом физико-математического факультета протокол № 7 от «13» марта 2024 г.

Приложение №1

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации

Критерии оценки промежуточной аттестации в форме зачета

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме зачета
«Зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов или в целом, или большей частью, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы или в основном сформированы, все или большинство предусмотренных рабочей программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Не зачтено»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

Критерии оценки промежуточной аттестации в форме экзамена

Оценка	Характеристика требований к результатам аттестации в форме экзамена
«Отлично»	Теоретическое содержание курса освоено полностью без пробелов, системно и глубоко, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены безупречно, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимуму.

«Хорошо»	Теоретическое содержание курса освоено в целом без пробелов, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, предусмотренные рабочей учебной программой учебные задания выполнены с отдельными неточностями, качество выполнения большинства заданий оценено числом баллов, близким к максимуму.
«Удовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено большей частью, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий выполнены, отдельные из выполненных заданий содержат ошибки.
«Неудовлетворительно»	Теоретическое содержание курса освоено частично, необходимые навыки работы не сформированы или сформированы отдельные из них, большинство предусмотренных рабочей учебной программой учебных заданий не выполнено либо выполнено с грубыми ошибками, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимуму.

6.2. Методические указания по организации самостоятельной работы студентов

Самостоятельная работа является одним из видов учебной деятельности обучающихся, способствует развитию самостоятельности, ответственности и организованности, творческого подхода к решению проблем учебного и профессионального уровня.

Аудиторная самостоятельная работа по учебной дисциплине осуществляется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя без его непосредственного участия.

Виды заданий для внеаудиторной самостоятельной работы, их характер, учитывать специфику изучаемой учебной дисциплины, индивидуальные особенности обучающегося.

Контроль самостоятельной работы и оценка ее результатов организуется как единство двух форм:

1. самоконтроль и самооценка обучающегося;
2. контроль и оценка со стороны преподавателя.

Организация и руководство аудиторной самостоятельной работы

Аудиторная самостоятельная работа по дисциплине выполняется на учебных занятиях под непосредственным руководством преподавателя и по его заданию.

Основными видами аудиторной работы самостоятельной работы являются:

- выполнение лабораторных и практических работ осуществляется на лабораторных и практических занятиях в соответствии с графиком учебного процесса. Для обеспечения самостоятельной работы преподавателями разрабатываются методические указания по выполнению лабораторной /практической работы.

Работа с литературой, другими источниками информации, в т.ч. электронными,

может реализовываться на семинарских и практических занятиях. Данные источники информации могут быть представлены на бумажном и/или электронном носителях, в том числе, в сети Интернет.

Преподаватель формулирует цель работы с данным и источником информации, определяет время на проработку документа и форму отчетности.

Само и взаимопроверка выполненных заданий чаще всего используется на семинарском, практическом и других видах занятий. Проблемная /ситуационная задача должна иметь четкую формулировку, к ней должны быть поставлены вопросы, ответы на которые необходимо найти и обосновать. Критерии оценки правильности решения проблемной/ситуационной задачи должны быть известны всем обучающимся.

Организация и руководство внеаудиторной работы

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

При предъявлении видов заданий на внеаудиторную самостоятельную работу рекомендуется использовать дифференцированный подход к уровню подготовленности

обучающегося. Перед выполнением внеаудиторной самостоятельной работы преподаватель проводит консультацию с определением цели задания, его содержания, сроков выполнения, ориентировочного объема работы, основных требований к результатам работы, критериев оценки, форм контроля и перечня литературы. В процессе консультации преподаватель предупреждает о возможных типичных ошибках, встречающихся при выполнении задания.

Для методического обеспечения и руководства самостоятельной работой в образовательном учреждении разрабатываются учебные пособия, методические рекомендации по самостоятельной подготовке к различным видам занятий с учетом специальности учебной дисциплины, особенностей контингента студентов, объема и содержания самостоятельной работы, форм контроля и т.п.

Самостоятельная работа может осуществляться индивидуально или группами студентов в зависимости от цели, объема, конкретной тематики самостоятельной работы, уровня сложности, уровня подготовленности обучающихся.

Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы могут быть:

- для овладения знаниями: чтения текста; составления плана текста; графическое изображение структуры текста; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочником; учебно-исследовательская работа; использование аудио и видеозаписей, компьютерной техники и Интернет ресурсов и др.;

- для закрепления и систематизации знаний: работа с конспектом лекции; повторная работа над учебным материалом; составление плана, тезисов ответа; составление таблиц, ребусов, кроссвордов, глоссария для систематизации учебного материала; изучение словарей, справочников; ответы на контрольные вопросы; аналитическая обработка текста; подготовка сообщений к выступлению на семинаре, конференции; подготовка рефератов, докладов; составление биографий, заданий в тестовой форме и др.

- для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; составление схем; решение ситуационных производственных задач; подготовка к деловым и ролевым играм; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности, подготовка презентаций, творческих проектов; подготовка курсовых и выпускных работ; опытно-экспериментальная работа; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности и др.

Для обеспечения внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине преподавателем разрабатывается перечень заданий для самостоятельной работы, который необходим для эффективного управления данным видом учебной деятельности обучающихся.

Преподаватель осуществляет управление самостоятельной работой, регулирует ее объем на одно учебное занятие и осуществляет контроль выполнения всеми студентами группы. Для удобства преподаватель может вести ведомость учета выполнения минимума заданий, необходимые для допуска к итоговой аттестации по дисциплине.

В процессе самостоятельной работы студент приобретает навыки самоорганизации, самоконтроля, самоуправления и становится активным самостоятельным субъектом учебной деятельности.

Студент самостоятельно определяет режим своей внеаудиторной работы и меру труда, затрачиваемого на овладение знаниями и умениями по каждой дисциплине, выполняет внеаудиторную работу по индивидуальному плану, в зависимости от собственной подготовки, бюджета времени и других условий.

Ежедневно студент должен уделять выполнению внеаудиторной самостоятельной работы в среднем не менее 3 часов.

При выполнении внеаудиторной самостоятельной работы студент имеет право обращаться к преподавателю за консультацией с целью уточнения задания, формы контроля выполненного задания.

6.3. Материалы для проведения текущего и промежуточного контроля знаний студентов

Вопросов к экзамену:

1. Особенности систем и задач естествознания и как объектов математического моделирования.
2. Кинетические уравнения в химии
3. Уравнения материального баланса в химии
4. Экстремум.
5. Дифференциальное уравнение экспоненциального роста.
6. Уравнение Лапласа.
7. Уравнение Пуассона.
8. Уравнение Неймана.
9. Частично изолированные популяции
10. Модель Оттесена.
11. Устойчивость систем дифференциальных уравнений.
12. Дифференциальные уравнения в экологии
13. Модель "хищник - жертва"
14. Модели биологической динамики на основе точечных отображений
15. Диаграмма Ламеррея
16. Элементы качественной теории дифференциальных уравнений
17. Дифференциальные уравнения в частных производных
18. Модели морфогенеза
19. Рост колоний микробов
20. Рост ареала популяции
21. Рост раковой опухоли
22. Устойчивое развитие биологических систем.

23. Периодические процессы
24. Биологические часы
25. Модели сердца
26. Стохастический резонанс в биологии
27. Модели гидродинамики
28. Движение рыб
29. Динамика крови
30. Нелинейные волны

Примерные задания для контрольных работ

Дифференциальные уравнения первого порядка

1. С помощью изоклин изобразить схематически решение уравнения $2(y + y') = x + 2$.
2. Решить уравнения, при необходимости сведя их к уравнениям с разделяющимися переменными
 1. $(x^3 + 2x)y^2 dy = x dx$; 2. $dy = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}} dx$; 3. $\frac{y'}{y} = x \cos^2 y$;
 4. $y' x^2 e^y = e^{-y}$, $y(1) = 0$; 5. $2(x + y)dy + (3x + 3y - 1)dx = 0$, $y(0) = 2$.
3. Решить однородные уравнения
 1. $x^2 y' - y^2 = 2x^2$; 2. $xy' = y(\ln y - \ln x)$; 3. $xydy - y^2 dx = (x + y)^2 e^{-y/x} dx$;
 4. $y' = \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}$; 5. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$, $y(0) = 1$.
4. Решить уравнения, при необходимости сведя их к линейным
 1. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$; 2. $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0$; 3. $xy' = y + x^2 \cos x$;
 4. $(x^2 - 1)y' - xy = x^3 - x$, $y(2) = 1,5$; 5. $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x$, $y(0) = 1$.
5. Решить уравнение Бернулли
 1. $y' = x^3 y^3 - xy$; 2. $xy + 2y = x^5 y$; 3. $2(xy' + y) = y^2 \ln x$, $y(1) = 2$.
6. Решить уравнение в полных дифференциалах
 1. $\left(\frac{2}{x^2} + y\right)dx + \left(x + \frac{2}{3}y^3\right)dy = 0$; 2. $2x^3 + xy + 2y^3$

$$y^2$$

$$y^2 \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} dy.$$

7. Найти интегрирующий множитель и общее решение уравнения

$$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0.$$

8. Определить тип уравнения и указать способ его решения:

1. $xy' - xe^{x/y} = 2$; 2. $xydx + (x+1)dy = 0$; 3. $xy' + 3xy^3 = 2y$;

4. $dy + (3y - e^{3x})dx = 0$; 5. $(x^3 + y^2)dx + 2xydy = 0$.

9. Найти общее и особое (если оно существует) решения уравнений

1. $(xy^2 + x)dx + (y^3 - x^3y^3)dy = 0$; 2. $xy' + y = y^2$; 3. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0$;

4. $y = \frac{1}{x}(1 + \ln y - \ln x)$; 5. $xe^{-x}dx + (x - ye^{-x} + y)dy = 0$.

10. Решить задачу Коши

1. $y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}$, $y(0) = -1$; 2. $3y' + 2xy = 2xye^{-2x^2}$, $y(0) = 1$;

3. $ydx = (3y \cos 2y - 2y^2 \sin 2y - x)dy$, $y(16) = \pi$.

11. Решить уравнения

1. $y = x + y' - \ln y'$; 2. $x[(y')^2 - 1] = 2y'$; 3. $y = xy' - (y')^2$.

Дифференциальные уравнения высших порядков

1. Решить уравнения, понизив их порядок

1. $y'' + 2xy' = 0$; 2. $(y-1)y'' = 2(y')^2$;

3. $y''' + 3y'y'' = 0$; 4. $yy'' = 2x(y')^2$, $y(2) = 2$, $y'(2) = 0,5$.

1. Найти общее решение уравнения

1. $y'' - 2y' + 4y = 0$; 2. $y'' + 6y' + 9y = 0$; 3. $y'' + 4y = 0$.

2. Решить задачу Коши

1. $3y'' - 2y' - 8y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$; 2. $y'' + \frac{\pi}{4}y = 0$, $y(\frac{\pi}{4}) = 2$, $y(\frac{\pi}{4}) = 1$.

3. Найти общее решение уравнения

$$2y'' + y' - y = f(x),$$

если

1. $f(x) = 3x^2 - 1$; 2. $f(x) = 3e^{-x}$; 3. $f(x) = 2\sin x$; 4. $f(x) = e^x \cos 2x$.

4. Найти решение задачи Коши

$$y'' + \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2},$$

методами Лагранжа и Коши.

5. Найти общее решение

1. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x$;

2. $y^{(4)} - y''' = 5(x + 2)^3$;

3. $(4x + 3)^2 y'' + (4x + 3)y' - 16y = 0$;

4. $x^2 y'' - 3xy' + 3y = -\ln x$.

Системы дифференциальных уравнений

1. Найти решения линейных систем

1) $\begin{cases} \dot{x} = -8x + 4y \\ \dot{y} = 3x - 4y \end{cases}$. 2) $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 5y \\ \dot{y} = -x + 2y \end{cases}$, $\begin{matrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 1. \end{matrix}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$. 4) $\begin{cases} \dot{x} = 6x + 4y + 2t \\ \dot{y} = -x + 10y - 1 \end{cases}$.

2. Решить систему дифференциальных уравнений методом Лагранжа

$$\begin{cases} x' = -4x + y, \\ y' = -6x + y + \frac{1}{1 + e^{2t}}. \end{cases}$$

3. Решить разными методами (или методом исключений, или методом Эйлера, или матричным методом) две системы дифференциальных уравнений $\vec{x}' = A\vec{x}$, где

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 5$; 2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 2$.

Записать матрицант каждой системы и найти их фундаментальные системы решений.

4. Решить систему дифференциальных уравнений

$$x'' - y'' + y' + x - 3y = 0, \quad 4y'' - 2x'' - x' -$$

$$2x + 5y = 0.$$

Образцы контрольных заданий

Контрольная работа по теме

«Дифференциальные уравнения первого порядка»

Вариант № 1

I. Определить тип и найти общие решения данных уравнений:

1. $(y + y \ln x)dx - (x - xy)dy = 0$.

$$2. \quad y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}.$$

$$3. \quad (xy^2 + \frac{x}{y^2})dx + (x^2y - \frac{x^2}{y^3})dy = 0.$$

II. Найти частные решения

$$1. \quad xy' - y = x \operatorname{tg} \left(\frac{y}{x} \right), \quad y(1) = 1.$$

$$2. \quad e^y dx = (2y - xe^y) dy, \quad y(-1) = 0.$$

Контрольная работа по теме

«Дифференциальные уравнения высших порядков»

Вариант №1

I. Определить тип и найти общие решения данных уравнений:

$$1. \quad y' = y' + x.$$

$$y' - 2y' + y = e^x \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$2. \quad x^2 \cdot$$

II. Решить задачу Коши:

$$1. \quad yy' + (y')^2 = 0. \quad y(1)=1, y'(1)=1.$$

$$2. \quad y' - y' = e^{-x} + 2x. \quad y(0)=1, y'(0)=1.$$

Задания для построения моделей:

1. Экспоненциальный рост популяции (решение уравнения, график временной зависимости для численности)
2. Логистический рост (решение уравнения, график временной зависимости для численности, анализ устойчивости стационарных состояний)
3. Модель популяции с наименьшей критической численностью (график временной зависимости для численности, анализ устойчивости стационарных состояний)
4. Дискретное логистическое уравнение. Лестница Ламерея (построение временной зависимости для численности по графику зависимости, анализ устойчивости положения равновесия)

5. Система линейных химических реакций (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)
6. Модель Лотки (модель химической реакции) (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)
7. Классическая модель Вольтерра «хищник-жертва» (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)
8. Модель отбора одного из равноправных (общая модель для двух видов и модель, учитывающая ограниченность в питательных ресурсах и быстрое их поглощение по сравнению с процессами репродукции) (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)
9. Модель конкуренции (с учетом внутривидовой конкуренции) (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)
10. Модель «хищник-жертва» (с учетом внутривидовой конкуренции) (определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)
11. Модель биохимической регуляции белкового синтеза (генетический триггер Жакоба и Моно) (для $m = 0$ определение стационарных состояний, построение главных изоклин, фазового портрета и кинетических кривых)
12. Брюсселятор (определение стационарных состояний, определение типа устойчивости стационарных состояний в зависимости от значений параметров системы, вид фазового портрета в зависимости от значений параметров системы)
13. Модель гликолиза (упрощенная схема) (определение стационарных состояний, определение типа устойчивости стационарных состояний в зависимости от значений параметров системы, вид фазового портрета в зависимости от значений параметров системы)

Примерная тематика курсовых работ

1. Разностные методы решения дифференциальных уравнений
2. Решение систем дифференциальных уравнений методом Адамса
3. Численные методы при решении дифференциальных уравнений. Численное интегрирование. Формула прямоугольников.
4. Решение систем дифференциальных уравнений методом Эйлера
5. Расчет полета снаряда

6. Решение систем дифференциальных уравнений методом прогноза и коррекции
 7. Численные методы. Приближенные вычисления. Интерполирование функций.
- Применение численных методов.

Сведения об утверждении программы на очередной учебный год и регистрации изменений

Учебный год	Решение кафедры (№ протокола, дата)	Внесенные изменения	Подпись зав. кафедрой