ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.А. БУНИНА

Н.Г. Подаева, Д.А. Жук

ЛЕКЦИИ ПО ОСНОВАНИЯМ ГЕОМЕТРИИ

Учебно-методическое пособие для студентов физико-математического факультета

ЕЛЕЦ–2005

УДК. 517.11

П

Печатается по решению Ученого Совета Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина

Подаева Н.Г., Жук Д.А. Лекции по основаниям геометрии – Елец.: ЕГУ, 2005. – 62с.

Предлагаемое учебное пособие, написанное на основе университетского курса лекций, посвящено основаниям геометрии в традиционном смысле и примыкает по тематике к ряду известных пособий, но отличается от них простотой и доступностью. Цель настоящего пособия - не излагать элементарные факты геометрии, а способствовать расширению традиционного ее преподавания, акцентируя внимание на философских аспектах геометрии, вопросах об отношении математической теории к действительности, о своеобразии математического метода исследования, а также на методологических вопросах взаимодействия геометрии с теорией множеств, аксиоматическим методом построения научной теории, математической логикой. Авторы стремились рассматривать эти вопросы не на объяснительно-репродуктивном, а на эвристическом уровне, направленном на развитие студентов.

Пособие рассчитано на российскую систему профессионального образования будущих учителей математики, на студентов не ранее чем с третьего-четвертого семестров обучения. Оно также может быть полезно аспирантам и преподавателям математики в средней школе и университете.

Рецензенты: д. п. н., профессор О.А. Савина (ЕГУ),
к. ф.-м. н., доцент В.Е. Щербатых (ЕГУ)

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемое учебное пособие, написанное на основе университетского курса лекций, посвящено основаниям геометрии в традиционном смысле и примыкает по тематике к ряду известных пособий, но отличается от них простотой, доступностью и направленностью на развитие студентов, их интеллектуальной активности, интеллектуальной деятельности.

Одну из основных целей изучения математики в вузе традиционно видят в репродуктивном расширении объема знаний за счет обогащения памяти. Между тем известно высказывание древнегреческого философа Гераклита: многознание не научает мудрости; мудрость - в знании оснований и причин, и в особенности логических оснований принимаемых положений. Без способности логически обосновывать имеющиеся положения научной теории, без обращения к ее основаниям и методологии не может быть подлинного и твердого знания - в том числе математики и особенно геометрии, изначально построенной на принципах формальной логики. Таким образом, под углом зрения развивающего обучения представляется необходимым обращение к методологической основе математики - в том числе к вопросам логического обоснования геометрии.

Формальная логика является наукой о законах правильного мышления, о требованиях, предъявляемых к последовательному и доказательному рассуждению. Логические операции - определение, классификация, доказательство, опровержение, обобщение, умозаключение и т.п., - применяются студентами при изучении геометрии зачастую неосознанно и нередко с погрешностями. Делая выводы из принципов и аксиом, доказывая теоремы, студенты часто не имеют представления о сущности доказательства и опровержения, об их видах и т.п. В связи с этим представляется целесообразным при изучении курса геометрии обращение к вопросам ее взаимоотношения с логикой - формальной и математической.

Формальная логика - одна из самых древних наук, - ее богатая событиями история насчитывает 2,5 тысячи лет. С момента своего возникновения формальная логика была самым тесным образом связана с философией. Только во второй половине XIX столетия логика «отпочковалась» от философии. Решающую роль в этом сыграло сближение логики и математики.

Математическая логика возникла на стыке двух столь разных наук, как философская логика и математика, что, однако, не привело к разрыву взаимосвязи новой логики с философией, а, напротив, укрепило её.

Цель настоящего пособия - не излагать элементарные факты логического обоснования геометрии, а способствовать расширению традиционного ее преподавания, акцентируя внимание на философских аспектах, вопросах об отношении математической теории к действительности, о своеобразии математического метода исследования, а также на методологических вопросах о взаимодействии геометрии с теорией множеств, с аксиоматическим методом построения научной теории, с математической логикой.

Мы стремились рассматривать эти вопросы не на объяснительно-репродуктивном уровне, а на эвристическом, направленном на развитие студентов. К такому высшему уровню, выполняющему развивающую функцию, относятся:

◊ вопросы, сталкивающие противоречивые точки зрения в основаниях математики, отражающие борьбу идей в истории развития математики;

◊ вопросы, сталкивающие неверные обыденные представления студентов о тех или иных фактах и явлениях с их научным объяснением;

◊ вопросы, сталкивающие различные способы решения тех или иных проблем в математике;

◊ вопросы, побуждающие к выявлению причинно-следственных связей фактов, явлений и их свойств;

◊ вопросы, побуждающие к обобщенным умозаключениям, выводам по изучаемому содержанию.

Пособие рассчитано на российскую систему профессионального образования будущих учителей математики, на студентов не ранее чем с третьего-четвертого семестров обучения. Оно также может быть полезно аспирантам и преподавателям математики в средней школе и университете.

Структурно материал учебного пособия можно подразделить на де части. Первая из них (раздел 1) представляет собой деятельное изложение общих вопросов аксиоматики. Вторая (раздел 2) содержит систематическое изложение исторического обзора обоснования евклидовой геометрии со времен Евклида и до аксиоматики Вейля. Каждая из названных частей достаточно независима от другой. От читателя требуется знание основ линейной алгебры и аналитической геометрии.

В курсе геометрии педвуза в соответствии с учебным пособием Л.С.Атанасяна, В.Т.Базылева рассматривается изучение высшей геометрии в схеме Вейля. Система аксиом Вейля, предложенная Г.Вейлем в книге "Пространство, время, материя" (1918), представляет собой векторный способ обоснования геометрии. Наиболее сильной стороной аксиоматики Вейля является возможность в значительной мере алгебраизировать доказательства, и поэтому, по образному выражению Г.Шоке, теория Вейля открывает "царский путь" в геометрию, который, согласно древнегреческой легенде, не мог указать царю Птолемею Евклид.

К другим достоинствам системы аксиом Вейля, определяющей структуру трехмерного и *n*-мерного пространства Евклида, является возможность без предварительных выводов развивать геометрию как аналитическую геометрию в векторной форме. По мнению Ж.Дьедонне, "при рассмотрении векторных пространств размерности 2 и 3 над полем вещественных чисел сразу же обнаруживается, что линейная алгебра и классическая "элементарная геометрия "отличаются друг от друга только языком: каждую из них можно понимать как перевод другой" [51].

По мнению А.Д.Александрова, " ... аксиоматика эта предполагает много. Она не только использует понятие вещественного числа. Например, в свойствах скалярного произведения уже заключается, по существу, теорема Пифагора" [19, с.211].

Однако достоинство аксиоматики Вейля, заключающееся в возможности в значительной мере алгебраизировать доказательства, при первоначальном изучении геометрии оборачивается ее существенным недостатком. По мнению некоторых методистов аксиоматика Вейля не способствует развитию пространственных представлений учащихся, их геометрической интуиции.

“Внедрение векторной аксиоматики в изложение геометрии связано с общей тенденцией, направленной на то, чтобы по возможности поглотить геометрию алгеброй, подавить геометрические представления алгебраическими выкладками”[19, с.211].

“В 1918 г. немецкий математик Г.Вейль дал систему аксиом, основанную на векторной алгебре. Вытеснение геометрии алгеброй распространилось и дошло до школьных учебников(см., например, принятый в недавнее время учебник стереометрии: Клопский В.М., Скопец З.А , Ягодовский М.И. Геометрия 9,-М.:Просвещение,1975, где в качестве дополнения излагается аксиоматика Вейля)”[19, с.641].

Несмотря на это, мы считаем, что *именно аксиоматика Вейля должна быть положена в основу изучения геометрии будущими учителями математики*, ибо из нее достаточно естественным путем можно получить любую возможную аксиоматику школьного курса геометрии. Преодоление же трудностей ее изучения, обусловленных высокой степенью абстрактности, отчасти способствует настоящее издание.

При подготовке пособия к изданию нашей целью было предложить изучающим геометрию студентам, аспирантам, преподавателям книгу, доступную для чтения, в которой они могли бы найти:

- содержательные сведения об основных математических структурах, раскрывающие наиболее значимые их аспекты с исторической точки зрения;
- прочную основу для изучения геометрии, опирающуюся на аксиомы, наглядно отраженные на чертежах;
- полные и прозрачные доказательства теорем геометрии;
- связи между различными геометрическими аспектами и теорией реального физического пространства;
- ответы на вопросы, порождаемые похвальным стремлением к общности, например: что произойдет в случае бесконечной размерности? Какая геометрия получится, если отбросить пятый постулат Евклида?

Наша цель будет полностью достигнута, если это пособие вызовет у читателя желание продолжить занятия и обратиться к более специальным работам. Для этого мы приводим достаточно большую библиографию, отражающую интерес к этим вопросам в науке.

Раздел 1: ОБЩИЕ ВОПРОСЫ АКСИОМАТИКИ

§1.1. Понятие о математической структуре

Основным методом в современной математике является аксиоматический метод в теоретико-множественном понимании, тесно связанный с понятием *математической структуры.*

Пусть $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ - непустые множества. $A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n$ - прямое (декартово) произведение этих множеств, т.е. множество всех упорядоченных *n*-местных кортежей $(a_1; a_2; ...; a_n)$, элемент a_i которых, стоящий на *i*-ом месте, принадлежит множеству $A_i, i = 1,2,...,n.$

В теоретико-множественной записи:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in A_i\}.$$

Определение 1.1.1. Любое подмножество декартова произведения множеств $A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n$ называется ***n-арным (или n-местным) отношением*** δ, определенным во множествах $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$.

Замечание. Из определения имеем:

1) $\delta \subset A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n$.
2) Элементы $(a_1; a_2; ...; a_n)$ ($a_i \in A_i, i = 1,2,...,n$) находятся в отношении δ, если $(a_1; a_2; ...; a_n) \in \delta$.
3) Если $A_1 = A_2 = A_3 = ... = A_n = A$, то $A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n = A^n$ - *n*-ая декартова степень множества A.
4) Если $\delta \subset A^n$, то говорят: на множестве A определено *n*-арное отношение δ.
5) В случае бинарного отношения $\delta \subset A_1 \times A_2$ вместо $(a_1; a_2) \in \delta$ пишут $a_1 \delta a_2$ - «a_1 находится в отношении δ с a_2». Например, отношение равенства на множестве R всех вещественных чисел – бинарное отношение.
6) Пусть на множестве A определена алгебраическая операция (внутренний закон композиции)

$$\varphi : A \times A \to A.$$

Ее можно рассматривать как тернарное отношение $\delta \subset A \times A \times A = A^3$, где

$$\delta = \{(a,b,c) \in A^3 \mid \varphi(a,b) = c\},\ a,b,c \in A.$$

7) Пусть на множестве A определен внешний закон композиции f с множеством операторов Λ:

$$f : \Lambda \times A \to A.$$

Его можно рассматривать как тернарное отношение, определенное на множествах Λ, A при помощи подмножества $\delta \subset \Lambda \times A \times A$, т.е.

$$\delta = \{(\lambda, a, b) \in \Lambda \times A \times A \mid f(\lambda, a) = b\},\ \lambda \in \Lambda,\ a,b \in A.$$

Рассмотрим конечную систему различных непустых множеств $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$. Пусть, например, $n = 3$.

Пусть $\sigma = \{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k\}$ - некоторая система тернарных отношений, определенных на множествах A_1, A_2, A_3 и обладающих свойствами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t$. То есть δ_i - это такое подмножество декартова произведения $A_1 \times A_2 \times A_3$, которое обладает всеми свойствами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t$ одновременно.

Может быть, что существует не одна, а несколько таких систем отношений $\sigma = \{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k\}$. Например, φ - алгебраическая операция на множестве R действительных чисел: $\varphi : R \times R \to R$ (т.е. φ можно рассматривать как единственное отношение $\delta = \{(a,b,c) \in R^3 \mid \varphi(a,b) = c\}$, $a,b,c \in R$). Пусть отношение δ обладает свойством коммутативности

$$\alpha_1 : \varphi(a,b) = \varphi(b,a) \ \forall a,b \in R.$$

Можно указать два знчения отношения δ, обладающего свойством α_1 (т.е. две коммутативные операции на R): δ' - сложение, δ'' - умножение, т.е.

$$\delta' = \{(a,b,c) \in R^3 \mid a + b = c\},$$
$$\delta'' = \{(a,b,c) \in R^3 \mid a \cdot b = c\}.$$

Пусть T - непустое множество всех систем $\sigma = \{\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k\}$ отношений, каждое из которых обладает заданными свойствами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t$.

Определение 1.1.2. Элемент $\sigma \in T$ определяет на множествах A_1, A_2, A_3 ***математическую структуру рода T***.

Определение 1.1.3. Явно сформулированные свойства $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t$, определяющие множество T, называются ***аксиомами*** структуры рода T.

Определение 1.1.4. Множества A_1, A_2, A_3 называются ***базой*** структуры рода T.

Таким образом, ***математическая структура рода T*** представляет собой одно или несколько множеств $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ (образующих *базу* структуры), элементы которых произвольной природы (основные, неопределяемые понятия данной теории) и находятся в некоторых *отношениях* $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_h$ (называемых основными неопределяемыми отношениями), удовлетворяющих *аксиомам* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_t$.

Аксиомы иногда характеризуют не одну с точностью до изоморфизма, а некоторое множество математических структур. Совокупность всех структур, определенных данной системой аксиом $\Sigma = \{\alpha_1, ..., \alpha_t\}$, называется ***родом T*** этих структур.

Совокупность предложений, которые можно вывести логическим путем из аксиом структуры, называется ***теорией структуры рода T***.

В 30-х годах XX в. Н. Бурбаки определил математику как науку о математических структурах. Математические структуры подразделены им на три вида: алгебраические, порядковые и топологические. Евклидово, псевдоевклидово, риманово, псевдориманово пространства, пространственно-временной континуум являются примерами структур топологического типа.

Рассмотрим простейшие структуры алгебраического типа. Всем структурам одного и того же рода дают специальное название: структура группы, структура n-мерного векторного пространства и др.

<u>Пример 1.1.1.</u> (структура группы). Система $\boldsymbol{\sigma}=\{\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\dots,\boldsymbol{\delta}_k\}$ отношений состоит из одного тернарного отношения $\boldsymbol{\delta}\subset \boldsymbol{G}\times\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{G}=\boldsymbol{G}^3$, соответствующего алгебраической операции:

$$\boldsymbol{\varphi}:\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}$$

(т.е. $\boldsymbol{\varphi}$ можно рассматривать как единственное отношение $\boldsymbol{\delta}=\{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\in\boldsymbol{G}^3\mid\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{c}\},\ \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{G}$). База состоит из одного множества $\boldsymbol{G}$. Три аксиомы системы аксиом $\boldsymbol{\Sigma}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\}$ структуры группы:

$\boldsymbol{\alpha}_1$: $\forall\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{G}:\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),\boldsymbol{c})=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}))$ - аксиома ассоциативности;

$\boldsymbol{\alpha}_2:\exists\boldsymbol{e}\in\boldsymbol{G}\ \forall\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{G}\ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{e})=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{e},\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$ - существование нейтрального элемента;

$\boldsymbol{\alpha}_3:\ \forall\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{G}\ \exists\boldsymbol{a}'\in\boldsymbol{G}\ \ \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}')=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{a})=\boldsymbol{e}$ - существование симметричного элемента.

<u>Пример1.1.2.</u> (структура n-мерного векторного пространства над заданным полем).

База состоит из двух множеств – основного множества $\boldsymbol{V}$ (его элементы - ***векторы*** – основные неопределяемые понятия); вспомогательного множества $\boldsymbol{K}$ (его элементы условно называются ***скалярами***). Система отношений $\boldsymbol{\sigma}=\{\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\dots,\boldsymbol{\delta}_k\}$ состоит из двух тернарных отношений:

$$\boldsymbol{\delta}_1\subset\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V},\qquad \boldsymbol{\delta}_1=\{\boldsymbol{a},\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}}\mid \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a},\vec{\boldsymbol{x}})=\vec{\boldsymbol{y}}\},\quad \boldsymbol{a}\in\boldsymbol{K},\vec{\boldsymbol{x}},\vec{\boldsymbol{y}}\in\boldsymbol{V};$$

$$\boldsymbol{\delta}_2\subset\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}^3,\quad \boldsymbol{\delta}_2=\{(\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{b}},\vec{\boldsymbol{c}})\mid\boldsymbol{\varphi}(\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{b}})=\vec{\boldsymbol{c}}\},\quad \vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{b}},\vec{\boldsymbol{c}}\in\boldsymbol{V}.$$

Аксиомы структуры векторного пространства $\boldsymbol{V}$ над полем $\boldsymbol{K}$:

$\boldsymbol{\alpha}_1:\forall\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}\in\boldsymbol{K}\ \forall\vec{\boldsymbol{a}}\in\boldsymbol{V}\ \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\mu},\vec{\boldsymbol{a}})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda\mu},\vec{\boldsymbol{a}})$;

$\boldsymbol{\alpha}_2:\forall\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}\in\boldsymbol{K}\ \forall\vec{\boldsymbol{a}}\in\boldsymbol{V}\ \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu},\vec{\boldsymbol{a}})=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda},\vec{\boldsymbol{a}}),\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\mu},\vec{\boldsymbol{a}}))$;

$\boldsymbol{\alpha}_3:\forall\vec{\boldsymbol{a}}\in\boldsymbol{V}\ \ \boldsymbol{f}(\mathbf{1},\vec{\boldsymbol{a}})=\vec{\boldsymbol{a}}$;

$\boldsymbol{\alpha}_4:\ \forall\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{b}}\in\boldsymbol{V},\ \forall\boldsymbol{\lambda}\in\boldsymbol{K}\ \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\varphi}(\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{b}}))=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda},\vec{\boldsymbol{a}}),\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\lambda},\vec{\boldsymbol{b}}))$;

$\boldsymbol{\alpha}_5:\exists\vec{\mathbf{0}}\in\boldsymbol{V}\ \forall\vec{\boldsymbol{a}}\in\boldsymbol{V}\ \ \boldsymbol{\varphi}(\vec{\mathbf{0}},\vec{\boldsymbol{a}})=\boldsymbol{\varphi}(\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\mathbf{0}})=\vec{\boldsymbol{a}}$;

$\boldsymbol{\alpha}_6:\ \forall\vec{\boldsymbol{a}}\in\boldsymbol{V}\ \ \exists(-\vec{\boldsymbol{a}})\in\boldsymbol{V}\ \ \boldsymbol{\varphi}(\vec{\boldsymbol{a}},(-\vec{\boldsymbol{a}}))=\boldsymbol{\varphi}((-\vec{\boldsymbol{a}}),\vec{\boldsymbol{a}})=\vec{\mathbf{0}}$;

$\boldsymbol{\alpha}_7:\boldsymbol{\varphi}(\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{b}})=\boldsymbol{\varphi}(\vec{\boldsymbol{b}},\vec{\boldsymbol{a}})\ \forall\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{b}}\in\boldsymbol{V}$;

$\boldsymbol{\alpha}_8:\boldsymbol{\varphi}(\vec{\boldsymbol{a}},\boldsymbol{\varphi}(\vec{\boldsymbol{b}},\vec{\boldsymbol{c}}))=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\varphi}(\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{b}}),\vec{\boldsymbol{c}})\ \forall\vec{\boldsymbol{a}},\vec{\boldsymbol{b}},\vec{\boldsymbol{c}}\in\boldsymbol{V}$.

Таким образом, ***теория структур рода $\boldsymbol{T}$*** – это множество предложений (теорем), являющихся логическими следствиями аксиом структуры рода $\boldsymbol{T}$.

Предметом математики являются математические структуры. Основной *метод математики* – **дедуктивный аксиоматический** (от общих аксиом к частным следствиям из них):

- вводятся неопределяемые, первичные понятия структуры;
- вводятся основные отношения;

- структуры строятся с помощью аксиом;
- затем, используя законы логики, строится теория структур данного рода.

§1.2. Интерпретация системы аксиом. Непротиворечивость системы аксиом

Пусть система $\sigma=\{\delta_1,\delta_2,...,\delta_k\}$ отношений, каждое из которых удовлетворяет аксиомам системы $\Sigma=\{\alpha_1,...,\alpha_t\}$, определяет математическую структуру рода T.

Определение1. 2.1. Система аксиом $\Sigma=\{\alpha_1,...,\alpha_t\}$ называется:

противоречивой, если не существует базы, допускающей структуру данного рода;

непротиворечивой содержательно, если существует такая база.

Таким образом, если найдено множество A, на котором можно придать конкретный смысл $\delta_1',\delta_2',...,\delta_k'$ отношениям $\delta_1,\delta_2,...,\delta_k$ так, чтобы выполнялись все аксиомы $\Sigma=\{\alpha_1,...,\alpha_t\}$ (т.е. на множестве A определена структура рода T), то говорят, что построена ***интерпретация системы аксиом*** $\Sigma=\{\alpha_1,...,\alpha_t\}$, а само множество A называют ***моделью структуры рода*** T.

Чтобы доказать содержательную непротиворечивость системы аксиом $\Sigma=\{\alpha_1,...,\alpha_t\}$, достаточно построить по крайней мере одну ее интерпретацию (модель соответствующей структуры).

Пример 1.2.1. Пусть R поле вещественных чисел; $\underbrace{R\times R\times ...\times R}_{n\ раз}=R^n$ - n-ая декартова степень поля R. Вводя известным образом операции сложения элементов из R и умножения их на числа из R:

$$(a_1,a_2,...,a_n)+(b_1,b_2,...,b_n)=(a_1+b_1,a_2+b_2,...,a_n+b_n),$$

$$\lambda\cdot(a_1,a_2,...,a_n)=(\lambda a_1,\lambda a_2,...,\lambda a_n),\ \ \forall\lambda\in R,$$

легко убедиться, что выполняются все аксиомы векторного пространства над полем R. Следовательно, R^n - модель структуры рода структуры векторного (линейного) пространства.

Пример 1.2.2. Пусть M – множество всех квадратных матриц 2-го порядка с действительными числами. Вводя известным образом операции сложения матриц и умножения их на числа из R, видим, что M – модель 4-мерного векторного пространства над полем R.

Определение 1.2.2. Система аксиом называется ***внутренне непротиворечивой***, если из нее нельзя получить логическим путем два утверждения, из которых одно является отрицанием другого.

Любое математическое доказательство непротиворечивости является относительным: оно лишь сводит вопрос о непротиворечивости одной теории к вопросу о непротиворечивости другой. Так, непротиворечивость геометрии Лобачевского была установлена в предположении о непротиворечивости геометрии Евклида, а вопрос о непротиворечивости последней был сведен к проблеме непротиворечивости арифметики.

Цель всякого доказательства непротиворечивости – свести вопрос о непротиворечивости данной теории к аналогичному вопросу для такой теории, непротиворечивость которой представляется более обоснованной. В этой связи большое значение имеет вторая теорема К. Геделя о неполноте, которая утверждает, что непротиворечивость аксиоматической теории, содержащей арифметику, невозможно доказать с помощью средств самой рассматриваемой теории*.

§1.3. Изоморфизм структур. Автоморфизм

Пусть $\boldsymbol{\Sigma} = \{\alpha_1, ..., \alpha_t\}$ - непротиворечивая (содержательно) система аксиом, т.е. она определяет структуру рода $\boldsymbol{T}$ с основными отношениями $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k$.

Пусть на множестве A' мы придали конкретный смысл $\delta'_1, \delta'_2, ..., \delta'_k$ отношениям $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k$, причем все аксиомы $\boldsymbol{\Sigma} = \{\alpha_1, ..., \alpha_t\}$ оказались выполненными для этих понятий $\delta'_1, \delta'_2, ..., \delta'_k$. Таким образом, A' - модель структуры рода $\boldsymbol{T}$, построенная с помощью понятий $\delta'_1, \delta'_2, ..., \delta'_k$.

Пусть A'' - другая модель структуры этого рода, построенная с помощью понятий $\delta''_1, \delta''_2, ..., \delta''_k$.

Определение 1.3.1. Структуры A' и A'' называются ***изоморфными***, если существует взаимно-однозначное отображение $f : A' \to A''$, которое сохраняет отношения $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k$, т.е. если элементы $x', y', ..., z' \in A'$ находятся в отношении δ'_j, то их образы $x'', y'', ..., z'' \in A''$ связаны отношением δ''_j.

$f : A' \to A''$ - изоморфизм структуры A' на структуру A''.

Как известно, изоморфизмом является биективный гомоморфизм.

<u>Пример 1.3.1</u>. Рассмотрим две конкретные структуры рода абелевой (коммутативной) группы:

$(\boldsymbol{R}, +)$ - аддитивная группа вещественных чисел;

$(\boldsymbol{R}_+, \bullet)$ - мультипликативная группа положительных вещественных чисел.

Зададим биективное отображение $f : \boldsymbol{R}_+ \to \boldsymbol{R}$ по правилу: $\forall x \in \boldsymbol{R}_+ \quad f(x) = \ln x.$ Это отображение сохраняет главные отношения:

$$f(x, y) = \ln(xy) = \ln x + \ln y = f(x) + f(y).$$

Следовательно, группы $(\boldsymbol{R}_+, \bullet)$ и $(\boldsymbol{R}, +)$ изоморфны.

Определение 1.3.2. Изоморфизм множества A, на котором определена математическая структура, на себя называется ***автоморфизмом*** этого множества.

---

* См. Новиков П.С. Элементы математической логики, 2 изд., М., 1973.

<u>Пример 1.3.2.</u> V - n-мерное векторное пространство над полем $\boldsymbol{R}$ вещественных чисел, λ - фиксированное вещественное число. Отображение $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$ по закону $\forall\vec{a}\in V\quad f(\vec{a})=\lambda\vec{a}$ является автоморфизмом. Действительно, оно биективно и сохраняет отношения:

$$f(\mu\vec{a})=\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}=(\mu\lambda)\vec{a}=\mu(\lambda\vec{a})=\mu f(\vec{a});$$

$$f(\vec{a}+\vec{b})=\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}=f(\vec{a})+f(\vec{b}).$$

Автоморфизм $\boldsymbol{f}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{V}$ называется ***векторной гомотетией***.

§1.4.Структурный подход к обоснованию евклидова пространства

В настоящее время получил широкое распространение используемый в различных разделах современной математики структурный подход к обоснованию евклидова пространства, связанный с именем Г.Вейля. При этом понятие пространства определятся с помощью наперед заданного поля *R* и векторного ассоциированного пространства *V*, которые понимаются как фиксированные множества с фиксированными операциями в них. Такой подход более точно назвать не аксиоматическим, а *структурным* или *конструктивным*, поскольку поле *R* и векторное пространство *V* считаются заранее известными, индивидуально выделенными структурами - своего рода константами.

Конечно, можно выписать все аксиомы поля *R*, векторного пространства *V* и добавить их к аксиомам Вейля евклидова пространства, получив таким образом аксиоматическое (без констант) определение евклидова пространства. Но такая аксиоматика представляется искусственной, поскольку включает различные по своей природе типы переменных: вещественные числа, векторы, точки и т.п.

Исходя из структурной точки зрения на математику (геометрию), можно предложить следующие дефиниции понятий, выделенных в выше приведенных вербально-геометрических высказываниях.

Определение 1.4.1. *Евклидово пространство* E_4. Пусть *V* - *4*-мерное векторное пространство над полем *R* вещественных чисел. Множество $E\neq\varnothing$ называется евклидовым пространством E_4, если задано отображение $\sigma: E\times E\to V$, удовлетворяющее следующим трем аксиомам Вейля:

1) $\forall(A\in E)\forall(\vec{x}\in V)\exists!(B\in E)|\sigma(A,B)=\vec{x}$.(Эквивалентная аксиома - $\forall(A\in E)$ отображение $\sigma_A: E\to V$ по закону: $\sigma_A(B)=\sigma(A,B)$, $\forall(B\in E)$, является биекцией).
2) $\sigma(A,B)+\sigma(B,C)=\sigma(A,C)$.
3) *V* - евклидово векторное пространство, то есть на *V* задана положительно определенная билинейная форма $g: V\times V\to R$ (число $g(\vec{x},\vec{y})=\vec{x}\cdot\vec{y}$ называется скалярным произведением векторов).

Аксиомы 1),2),3) определяют структуру 4-мерного вещественного евклидова пространства E_4. Базой структуры E_4 служит тройка множеств *E, V, R*

, где R - поле вещественных чисел, а V наделено алгебраической структурой четырехмерного евклидова векторного пространства над полем R.

Аксиомы 1),2) определяют структуру *аффинного* 4-мерного пространства A_4

Определение 1.4.2. *Псевдоевклидово пространство* ${}^1E_4$. Аффинное пространство A_4 называется псевдоевклидовым пространством Минковского ${}^1E_4$ индекса $\kappa = 1$, если его пространство переносов V является псевдоевклидовым векторным пространством индекса $\kappa = 1$.

Введем определение *псевдоевклидова векторного пространства*. Пусть V - векторное пространство размерности $n = 4$ над полем R. Зададим билинейную форму $g{:}V \times V \to R$ так, чтобы соответствующая квадратичная форма $q(\vec{x}) = g(\vec{x},\vec{x})$ была бы невырожденной (r=4) квадратичной формой индекса $\kappa = 1$ (т.е. имела бы нормальный вид $q(\vec{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$). Число $g(\vec{x},\vec{y}) \in R$ назовем скалярным произведением векторов $\vec{x},\vec{y}$ и обозначим через $\vec{x} \cdot \vec{y}$. В нормальном виде

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = g(\vec{x},\vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4.$$

Число $|\vec{x}| = \sqrt{q(\vec{x})} = \sqrt{\vec{x}^2}$ назовем *длиной* (нормой) вектора $\vec{x}$. В нормальном виде

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2}$$

Определение 1.4.3. Векторное пространство V, в котором скалярное произведение определено при помощи указанной выше билинейной формы g, называется *псевдоевклидовым векторным пространством индекса* $\kappa = 1$.

Таким образом, можно дать следующее аксиоматическое определение пространства ${}^1E_4$. Пусть V - 4-мерное векторное пространство над полем R .

Определение 1.4.4. Множество $E \neq \varnothing$ называется псевдоевклидовым пространством ${}^1E_4$, если задано отображение $\sigma{:}E \times E \to V$, удовлетворяющее следующим трем аксиомам Вейля:

1) $\forall(A \in E)\forall(\vec{x} \in V)\exists!(B \in E)|\sigma(A,B) = \vec{x}$. (Эквивалентная аксиома - $\forall(A \in E)$ отображение $\sigma_A{:}E \to V$ по закону: $\sigma_A(B) = \sigma(A,B)$, $\forall(B \in E)$, является биекцией).
2) $\sigma(A,B) + \sigma(B,C) = \sigma(A,C)$.
3) V - псевдоевклидово векторное пространство индекса $\kappa = 1$, то есть на V задана билинейная форма $g{:}V \times V \to R$, для которой соответствующая квадратичная форма $q(\vec{x}) = g(\vec{x},\vec{x})$ является невырожденной индекса $\kappa = 1$ (число $g(\vec{x},\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$ называется скалярным произведением векторов).

Исходя из этих аксиом, можно доказать, что в псевдоевклидовом пространстве существуют ненулевые векторы, норма которых равна нулю ($\vec{x} \neq \vec{0}, |\vec{x}| = 0$), - *изотропные векторы,* а также векторы, имеющие мнимую длину. Расстояние между точками определяется по формуле

$$\rho(A,B) = \sqrt{\overline{A}\vec{B}^2}.$$

Но так как скалярный квадрат ненулевого вектора в псевдоевклидовом пространстве может быть равным нулю, меньшим нуля, то расстояние

$\rho(A,B)$ может быть не только вещественным, но и мнимым, а также равным нулю при $A \neq B$ (когда вектор $\overline{A}\vec{B}$ изотропный).

Определение 1.4.5. *Движением пространства* ${}^1E_4$ (E_4) называется такое преобразование (биективное отображение пространства на себя), которое сохраняет расстояние между двумя точками. Множество всех движений пространства ${}^1E_4$ (E_4) образует группу.

Определение 1.4.6. Множество точек $\left\{M|\rho(A,M)=0\right\}=\left\{M|g(\overline{A}\vec{M},\overline{A}\vec{M})=0\right\}$ представляет собой конус второго порядка с вершиной в точке А, который называется *изотропным конусом* и играет в СТО роль светового конуса.

Определение 1.4.7. Фигура $\Omega=\left\{M|\rho(O,M)-\text{мнимое}\right\}$ называется *внутренней областью* относительно изотропного конуса и играет в СТО роль «активного» будущего и «пассивного» прошлого.

Таким образом, псевдоевклидова геометрия является геометрией пространства-времени в СТО. Геометрией пространства в ОТО является неевклидова геометрия - геометрия римановых пространств (не смешивать с римановой геометрией, изучаемой в разделе «Неевклидовы геометрии»), с основами которой студенты знакомятся в курсе дифференциальной геометрии.

§1.5. Аксиоматический метод в развитии геометрии

Для современной математики в целом характерен аксиоматический подход. Особый интерес представляет аксиоматическое построение геометрии. Аксиоматическое изложение «на манер геометрии» (по образному выражению Б. Спинозы) на протяжении многих веков считается идеалом любой науки.

Как же можно охарактеризовать аксиоматический метод? В Большой Советской Энциклопедии имеется следующее определение:

«Аксиоматический метод – способ построения научной теории, при котором в ее основу кладутся некоторые исходные положения (суждения) – аксиомы или постулаты, из которых все остальные утверждения этой теории (теоремы) должны выводиться чисто логическим путем, посредством доказательств. Назначение аксиоматического метода состоит в ограничении произвола при принятии научных суждений в качестве истин данной теории.

Построение науки на основе аксиоматического метода обычно называют дедуктивным. Все понятия дедуктивной теории (кроме фиксированного числа первоначальных) вводятся посредством определений, выражающих (или разъясняющих) их через ранее введенные понятия».*

Таким образом, аксиоматическое построение некоторой теории осуществляется следующим образом.

* БСЭ. Изд. 3-е, т.1. М., 1970, с. 345-346.

1) Выбираются основные (первичные) понятия и отношения данной теории, которые не определяются.
2) Выделяются некоторые первичные утверждения – аксиомы, устанавливающие связь между первичными понятиями и отношениями и принимаемые без доказательств.
3) Все новые понятия, вводимые в данной теории, определяются через ранее выделенные понятия и отношения; все новые утверждения (теоремы) теории доказываются на основе ранее введенных понятий и аксиом (или предшествующих теорем). Правила вывода одних истинных предложений из других в рамках данной теории не исследуются, а являются предметом математической логики.

Для осуществления аксиоматической теории в конкретном множестве объектов используется ее интерпретация (или модель), представляющая собой непустое множество, для которого указаны первичные понятия и отношения и выполнены аксиомы этой теории.

Так, например, в модели векторного пространства роль вектора может играть матрица, состоящая из вещественных чисел, или упорядоченная система вещественных чисел.

Каждая система аксиом должна удовлетворять общим требованиям – непротиворечивости, полноты и независимости.

Требование *внутренней непротиворечивости* состоит в том, чтобы выводы из данной системы аксиом не приводили к возникновению двух взаимно исключающих утверждений P и его отрицания $\overline{P}$ (иначе теория теряет всякую ценность для познания того или иного явления реальной действительности, отраженного в той или иной математической модели).

Так, теорема Пифагора выводится из системы аксиом евклидовой геометрии и поэтому является утверждением этой геометрии. Ее отрицание, т.е. утверждение о том, что в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы не равен сумме квадратов катетов, не принадлежит к числу утверждений геометрии Евклида; оно не может быть выведено из системы аксиом Евклида, т.к. эта система непротиворечива.

Содержательная непротиворечивость системы аксиом обычно устанавливается построением модели этой системы.

Вообще говоря, как показал австрийский математик К. Гедель (1906 г.р.), строгое доказательство непротиворечивости конкретной теории невозможно.

Требование *полноты* состоит в том, что добавление к данной системе аксиом какого-либо не выводимого из нее предложения в качестве новой аксиомы должно обращать систему аксиом в противоречивую (полнота в узком смысле).

Полнота в широком смысле трактуется как возможность доказать в рамках данной теории всякое предложение (или его отрицание), которое может быть сформулировано с помощью этой системы, на языке этой теории. Иными словами, полнота системы аксиом (в широком смысле) гарантирует существование ответа на любой вопрос, поставленный в рамках данной теории. Классический пример – аксиома параллельности Евклида. В свое время ее пытались доказать (или опровергнуть) в рамках абсолютной геометрии. Это оказалось невозможным, т.к. система аксиом абсолютной геометрии по отношению к данному утверждению (пятому постулату Евклида) является неполной.

Независимость системы аксиом определяется тем, что ни одна из аксиом данной системы не может быть следствием других аксиом этой системы, т.е. невыводима из других аксиом данной системы.

Чтобы доказать независимость какой-либо аксиомы от остальных аксиом системы, достаточно выбросить ее из списка аксиом, заменить отрицанием и доказать непротиворечивость полученной системы аксиом (т.е. построить ее модель).

В качестве примера здесь уместно привести аксиоматические исследования Н.И. Лобачевского. Он первым в своих работах четко сформулировал и обосновал, что пятый постулат Евклида не зависит от остальных аксиом геометрии Евклида (т.е. от аксиом абсолютной геометрии). Лобачевский отвергает этот постулат и заменяет его отрицанием – аксиомой Лобачевского. Используя аксиому Лобачевского и все аксиомы Евклида, кроме пятого постулата, Лобачевский развивает свою (гиперболическую) геометрию на плоскости и в пространстве.

Обратимся к истории возникновения и развития аксиоматического метода. Аксиоматический метод возник в трудах древнегреческих мыслителей. Так, известно, что существовали другие цивилизации, которые в своих работах не использовали аксиоматический метод. Например, Г.Г.Цейтен пишет о египетской математике: «…что касается их математических познаний, то они представляли собой собрание задач с соответствующими их решениями» /120, с.21-22/. Насчет индусской математики этот же автор отмечает: «Индусы не обнаруживали никаких способностей к теоретической строгости, но зато они были совершенно лишены той теоретической щепетильности, которая привела греческих математиков к пренебрежению реальными числовыми выкладками под тем предлогом, что последние часто дают лишь приближенные значения. Наоборот, индусы только путем числовых выкладок и их практического эмпиризма моли усвоить себе теоремы и методы, теоретического обоснования которых они, может быть, даже не понимали по-настоящему. Во всяком случае, они не формулируют словесно этих доказательств; они довольствуются проведением чертежей, на которых основывалось у греков доказательство, сопровождая их при этом словом «смотри» /120, 175/.

Центральным вопросом в истории развития греческой математики являются знаменитые «Начала» Евклида, в которых он использовал аксиоматический метод. Личный вклад Евклида сводился, главным образом, к расположению и более точному, чем до него, изложению известного материала, со строгими логическими требованиями, выработавшимися к его времени у древнегреческих математиков /120, 80/.

В течение многих веков аксиоматический метод усовершенствовался. Немалый вклад в этом направлении был внесен еще мыслителями эллинской школы – Архимедом Сиракузским /287-212 гг. до н.э./, Эратосфеном Киренским /276-194 гг. до н.э./, Аполлонием Пергским /265-170 гг. до н.э./. Например, очень интересна в этом отношении работа Архимеда «Исчисление песчинок (Псаммит)», в которой решается задача на определение числа песчинок в пространстве вселенной с помощью аксиоматического метода /9, 57/.

Усовершенствовался аксиоматический метод греческими комментаторами Евклида: Героном Александрийским /I столетие до н.э. – I столетие н.э./, Порфирием Сирийским, Папой Александрийским /оба в III столетии н.э./, Проклом /V в.н.э./ и др. Комментарии греческих ученых, как известно, относятся к определениям вводимых понятий, аксиомам, постулатам и предложениям «Начал» Евклида. Многое в этом направлении сделал самый известный из всех греческих комментаторов Евклида Прокл.

Известна большая работа по развитию аксиоматического метода мыслителей средневековья: ал-Джаухари, Сабит ибн Корра, ан-Найрузи, Ибн Сина, Ибн ал-Хайсама, ал-Бируни, Омар Хайям, Хусам ад-Дина ас-Салара, Наир ад-Дин ат-Туси и многих других. Более тридцати работ, содержащих комментарии к началам Евклида, принадлежат арабским ученым. В основном учеными средневековья разработаны теории о параллельных прямых, основанные на идее доказательства пятого постулата Евклида.

Комментаторы Евклида в эпоху Возрождения и после нее в основном претендовали на существенное улучшение содержания «Начал»: «Восстановленный Евклид» /Борелли, 1658 г./, «Переработанный Евклид» /Маркетти, 1709 г./, «Евклид, освобожденный от всякого пятна» /Саккери, 1733 г./ и др.

Таким образом, в результате критического отношения к содержанию «Начал», комментаторы Евклида вскрыли существенные недостатки применения аксиоматического метода, которые, прежде всего, касались исходных положений. Несмотря на весьма важные логические выводы теории Евклида, его «Начала» не являются строгой дедуктивной системой.

Пятый постулат Евклида с древнейших времен и по настоящее время не дает покоя людям, увлеченным его доказательством. Попытки доказательства пятого постулата внесли весомый вклад в развитие аксиоматического метода. Проблему доказательства пятого постулата в свое время решил Н.И. Лобачевский, открыв неевклидову геометрию.

После открытия Н.И.Лобачевским, Я.Бойяи и К.Гауссом новой, неевклидовой, геометрии известный математик Д.Гильберт /XIX - XX вв./ привел евклидову систему к достаточной для того времени строгости в своем труде «Основания геометрии» (1899). Однако теорема Геделя о непротиворечивости и полноте, открытая в начале 30-х годов XX века, наложила определенные границы на всеобъемлющую аксиоматизацию.

Очень важно, что с помощью аксиоматического метода человечество сделало большой скачок в области познания окружающей действительности. Если вплоть до начала XIX в. господствовало представление о существовании единственного, богом созданного пространства, то открытие геометрии Лобачевского доказало возможность существования других пространств, описываемых в других, неевклидовых геометриях, и тем самым дало толчок для дальнейшего развития аксиоматического метода.

Известно, что «Начала» Евклида использовались в школах многих стран до XVIII века. Первый перевод «Начал» с латинского языка на русский язык был сделан И.А. Астаровым – «Евклидовы элементы» /1739/. Лучшим переводом считается считается перевод Д.Д. Мордухая-Болтовского – «Начала Евклида» /4-6/, но в школах России переводы «Начал» не использовались как учебная книга.

В свое время известный математик Ф.Клейн писал: «Совершенно очевидно, что идеальной целью, манившей Евклида, был свободный от пробелов чисто логический вывод всех геометрических теорем из наперед указанных посылок. В создании /либо в передаче/ этого идеала заключается, без сомнения, ядро исторического значения «Начал». Но Евклиду в действительности никоим образом не удалось достигнуть этой высокой цели, и как раз в исследованиях, относящихся к основаниям геометрии, современная наука достигла более глубокого понимания и вскрыла неясности, имевшиеся у Евклида» /66, 299/.

Вскрытию недостатков в дедуктивном изложении «Начал» Евклида посвящены много работ видных ученых.

Несмотря на недостатки, «Начала» Евклида сыграли огромную роль в развитии самой математики, а также в постановке ее преподавания:

«1.Великое историческое значение «Начал» Евклида состоит в том, что они передали последующим временам идеал вполне /беспредельно/ логической обработки геометрии.

2.Что касается выполнения, то многое проделано очень тонко, но многое другое оказывается принципиально отсталым с точки зрения наших взглядов» / 111, 319/.

Одним из первых отошел от евклидовского характера изложения геометрии во Франции П.Рамус /1569 г./ Он выдвигает на первое место при изучении геометрии интуицию. По его мнению, не обязательно выводить все геометрические положения из заранее сформулированных аксиом. Определения он вводит по мере возникновения потребности в них в процессе самого изложения, а не перечисляет их все сразу в начале курса.

Со второй половины XVIII в. во Франции выдвигаются новые идеи в области образования. Большую роль в этом сыграл видный ученый-математик Б.Ж.Даламбер /1749-1822/. В ряде своих статей он изложил новую точку зрения на принципы построения курса геометрии.

По плану Даламбера, в основу курса геометрии должны быть положены вопросы измерения, причем сам учебник должен быть разбит на три радела: измерение длин, площадей и объемов. В связи с эти Даламбер считает нужным исключить из курса геометрии аксиомы и постулаты, пересмотреть систему определений основных понятий Евклида. Дедукция, по мнению Даламбера, должна направляться от сложных предложений к более простым и очевидным без попыток полного перечисления последних.

По плану Даламбера составлялись учебники как в самой Франции /Безу, Лежандр, Лекруа/, так и в других странах.

Главная цель Лежандра при построении своего курса «Элементы геометрии» – это установление замкнутой абстрактной системы элементарной геометрии, содержание и метод изложения которой во многом определяется «Началами» Евклида. Одновременно автор придает своему курсу метрический характер, основанный на идее Даламбера.

Известно, что система геометрического образования в средних учебных заведениях России поддерживалась в основном учебниками А.Ю. Давидова, А.П. Киселева и др. В конце XIX столетия в России было написано много интересных руководств для средних учебных заведений.

Учебник А.П. Киселева, созданный в 1892 г., действовал в средних школах нашей страны вплоть до конца 60-х годов XX столетия.

О той эпохе, в которую работал А.П. Киселев, профессор И.К. Андронов пишет: «… научно-педагогическое творчество Андрея Петровича протекало в эпоху коренной ломки структуры математики вообще и элементарной в особенности, когда разрушались вековые границы предметов, классические определения, взгляды на систему аксиом и теорем …, когда геометрия выдвигает на первое место культуру геометрического образа и его точечных преобразований на основе идеи группы; …» /17, 69/.

Учебник /69/ был написан с учетом составления учебников как русскими, так и зарубежными авторами. Он представляет собой модернизированный учебник евклидовско-лежандровского направления.

Основанием для построения материала служат понятия и аксиомы. Понятия «пространство», «плоскость», «прямая» считаются основными, а все другие понятия учебника /69/ определяются, причем определения даются с указанием рода и видового отличия либо происхождения. Например, геометрическое тело определяется как часть пространства, занимаемая каким-нибудь предметом; поверхность – как то, чем ограничено тело от остального пространства; линия – граница, отделяющая одну часть поверхности от другой и, соответственно, точка – это граница, отделяющая одну часть линии от другой.

С современной точки зрения на аксиоматическое построение курса геометрии непонятными являются в этих определениях слова – «часть», «предмет», «ограничено», «граница» и др.

Наряду с учебником геометрии А.П. Киселева были созданы и другие учебники по курсу геометрии. Это учебники С. Шубина, К.Н. Рашевского, Н. Извольского и др. Большая часть этих и других учебников изложена традиционно, но каждый из них имеет свои особенности, свои отличительные моменты, как положительные, так и отрицательные. Например, в учебнике К.Н. Рашевского /102/ можно найти много биографических, исторических сведений. Здесь же кратко освещаются успехи развития геометрии, говорится об открытии геометрии Лобачевского, но об аксиоматическом методе, также как и во многих других учебниках того времени, ничего конкретного не говорится.

Некоторые авторы учебников геометрии вообще отрицали педагогическую ценность аксиоматического метода в геометрии. Например, в учебниках Н. Извольского /57/, /58/ это отрицание привело к тому, что в этих учебниках вообще не используются понятия «теорема», «аксиома», не решаются задачи на доказательство, хотя в основу геометрического изложения планиметрии положены аксиомы.

Таким образом, можно сделать следующие выводы относительно использования аксиоматического метода в истории геометрического образования.

1. Ни один из рассмотренных выше учебников геометрии не построен на основе аксиоматического метода в современном его понимании.
2. Почти во всех учебниках аксиома определяется как очевидная истина, не требующая доказательств (априорно). Понятию движения геометрических фигур придается физический смысл.
3. Только в 21-м издании учебника А.П. Киселева профессором Н.А. Глаголевым введено «Дополнение» в котором рассказывается об аксиоматическом методе в современном его понимании на основе системы аксиом Д. Гильберта, затрагивается вопрос о геометрии действительного материального мира.
4. Ни в одном учебнике геометрии нет полной системы аксиом.
5. Во всех дореволюционных русских учебниках геометрии приводятся только лишь примеры аксиом, но не дается система аксиом, достаточная для построения школьного курса геометрии.
6. Многие дореволюционные русские учебники были написаны после открытия геометрии Лобачевского, после изложения «Эрлангенской программы», но эти идеи не были отражены в тех руководствах, которые были использованы в качестве учебников для учащихся средних учебных заведений.
7. Учебник геометрии А.П. Киселева отражает некоторые идеи «Эрлангенской программы», хотя в основном следует идеям аксиоматического метода, понимаемого еще до открытия геометрии Лобачевского, не учитывает логическое обоснование построения геометрии Д. Гильбертом.

В начале 60-х годов нашего столетия остро встала проблема усовершенствования содержания и методов обучения математике и, в частности, геометрии в средней школе.

Решение этой проблемы предполагалось по следующим направлениям: *а)* с помощью аксиоматического метода; *б)* на основе понятия метрического пространства; *в)* на основе векторного пространства; *г)* на основе группы геометрических преобразований.

По поводу первого направления построения школьного курса геометрии математиками, методистами были высказаны самые разные мнения. Например, наше внимание привлекла такая точка зрения: «Не изгонять из школы идеи аксиоматического метода…. Десятистраничное «дополнение» к многолетнему курсу геометрии не может … заменить постепенного, хорошо продуманного воспитания.

… только отчетливое понимание факта: «наряду с геометрией как опытной наукой существует еще и абстрактная геометрия» – дает возможность подлинного … понимания самого замысла геометрии Лобачевского, т.е. идеи, подлинное знакомство с которой должно быть обеспечено для каждого культурного человека» /12, 26-27/.

Впервые в истории развития учебника геометрии авторским коллективом под руководством академика А.Н. Колмогорова в начале 70-х годов был предложен школьный курс геометрии для учащихся 6-8 классов, построенный на основе аксиоматического метода.

Основное достоинство аксиоматического метода, главная причина, по которой он должен рассматриваться в школьном курсе геометрии, состоит, на наш взгляд, в том, что, следуя ему, человечество сделало революционный шаг в познании объективной реальности. Во все времена математика занимала видное место среди других наук, изучающих законы природы.

Идея аксиоматического метода возникла в Древней Греции. Как уже отмечалось нами выше, блестящим образцом применения аксиоматического метода вплоть до XIX века служили «Начала» Евклида, созданные в III веке до н.э. В то время еще не вставал вопрос об описании логических средств, с помощью которых извлекаются содержательные следствия из аксиом. Тем не менее, у Евклида достаточно четко проведена идея получения всего основного содержания геометрической теории чисто дедуктивным путем, из некоторого числа аксиом, истинность которых представляется наглядно очевидной.

Внимательное изучение системы Евклида привело ученых к выводу, что в «Началах» имеются довольно серьезные недоработки. Например, число аксиом, сформулированных Евклидом, является недостаточным для строгого изложения геометрии, поэтому Евклид при изложении некоторых своих доказательств опирался на непосредственную очевидность, наглядность, интуицию и чувственные восприятия.

Попытки логически безупречно обосновать геометрию продолжались в течение многих сотен лет. Открытие в начале XIX века неевклидовой геометрии Н.И. Лобачевским, Я. Бойяи и К. Гауссом явились толчком к дальнейшему развитию аксиоматического метода, который привел к попыткам нового дедуктивного построения геометрии, отвечающего современным требованиям науки.

Так, немецкий математик М. Паш предложил аксиомы порядка, связанные с логически необоснованным до тех пор понятием «между». Итальянские математики Дж. Пеано, Дж. Веронезе, М. Пиери также внесли определенный вклад в дальнейшее обоснование геометрии – в разработку аксиоматики обоснования арифметики. Г. Кантор и Р. Дедекинд исследовали аксиомы непрерывности.

В связи с этими достижениями перед наукой встала историческая задача, связанная со строгим обоснованием геометрии на рубеже XIX и XX столетий, решение которой было предложено, независимо друг от друга, рядом ученых. В истории развития аксиоматического метода важную роль сыграли аксиомы Д. Гильберта, немецкого ученого /1862-1943/, выделявшегося среди плеяды ученых того периода. Эти аксиомы в свое время соответствовали уровню строгости геометрии. В 1899 г. Д. Гильберт писал: «Геометрия, так же как и арифметика, требует для своего построения только немногих простых основных положений. Эти основные положения называются *аксиомами* геометрии. Установление аксиом геометрии и исследование их взаимоотношений – это задача, которая со времен Евклида явилась темой многочисленных прекрасных произведений математической литературы. Задача эта сводится к логическому анализу нашего пространственного представления.

Настоящее исследование представляет собой новую попытку установить для геометрии *полную о возможно более простую* систему аксиом и вывести из этих аксиом важнейшие геометрические теоремы …» /45, 55/.

В своем сочинении /45/ автор исходит из шести основных неопределяемых понятий, содержание которых раскрывается в системе аксиом, состоящей из пяти групп. Прямое определение основным понятиям геометрии не дается: точке, прямой, плоскости, а также отношениям: принадлежит, между, конгруэнтный. Эти понятия и отношения не связываются ни с какими представлениями о конкретных предметах, а то, что необходимо знать о них, излагается в аксиомах, которые являются, таким образом, косвенными их определениями. Под точкой, прямой, плоскостью и т.д. можно понимать все, что угодно, лишь бы они удовлетворяли сформулированным аксиомам. Исходя из этого, понятие аксиомы в современной математике определяется иначе. Раньше полагали, что аксиома – это очевидная истина, не требующая доказательства, или истина, которую невозможно доказать. С точки зрения Д. Гильберта, аксиомы – это предложения, принимаемые без доказательства с целью раскрытия содержания основных понятий и построения на их основе строго дедуктивной науки.

Немаловажная роль в обосновании геометрии принадлежит и советскому математику В.Ф. Кагану /1869-1953/.

Аксиоматический метод, впервые разработанный Д. Гильбертом в геометрии с новых позиций, проник и в другие ветви математики: в теорию множеств, алгебру, топологию, теорию вероятностей и др. Кроме этого, аксиоматический метод стал использоваться и при построении других наук, в особенности физики. Эти достижения связаны с переворотом в геометрии, совершенным Н.И. Лобачевским.

Исторически сложилось, что именно к пятому постулату Евклида на протяжении многих веков было привлечено внимание математиков. Глубоко проанализировав попытки доказательства пятого постулата, как свои, так и принадлежащие другим математикам, Н.И. Лобачевский пришел к убеждению о независимости этого постулата от остальных аксиом, т.е. к непротиворечивости геометрии, в которой аксиоматизируется существование двух различных прямых, проходящих через данную точку параллельно заданной прямой.

Н.И. Лобачевский не только предугадал существование новой геометрии – неевклидовой, но и детально ее разработал. Его точка зрения противоречила всем представлениям человека об окружающем мире. Новая геометрия резко расходилась с философским взглядом того времени на пространство /И. Кант/, поэтому это открытие было ошеломляющим. Получалось так, что предположение о неевклидовости реального физического пространства не противоречило аксиомам Евклида, кроме пятого постулата.

Н.И. Лобачевский, как известно, предпринял попытку исследования реального пространства, используя для этой цели астрономические данные. Он надеялся, что с помощью астрономических измерений можно будет обнаружит отклонение геометрии реального пространства от евклидовой. Хотя его вычисления не позволили опытным путем доказать гипотезу о неевклидовости реального пространства, сама гипотеза оказалась гениальным предвидением.

Открытие геометрии Лобачевского имело большое философское значение, т.к. оно укрепило точку зрения материализма. В свое время знаменитый немецкий философ-идеалист И. Кант полагал, что человеческий разум может дать лишь чисто субъективную картину мира. По философии Канта, пространственные представления возможны лишь в рамках геометрии Евклида. По его мнению, все математические положения не зависят от опыта, а непосредственно вытекают из разума – априорны. При доказательстве этого он опирался на положение об очевидности аксиом. Кант считал, что геометрия Евклида единственно возможная геометрия, т.к. можно представить себе толь единственное пространство.

Геометрия Лобачевского нанесла сокрушительный удар по учению Канта. Открытие, сделанное Лобачевским, доказало возможность существования непротиворечивой геометрической системы, отличной от системы Евклида, а это, в свою очередь, показало, что аксиомы геометрии не могут представлять собой положения, зависящие только от человеческого разума, то есть аксиомы – это всего лишь гипотезы, требующие опытной проверки.

В 70-е годы прошлого столетия была доказана непротиворечивость геометрии, по праву получившей имя Лобачевского. Доказательство это было построено с помощью моделей Кэли-Клейна и Пуанкаре.

Следующим крупнейшим достижением науки стала созданная в начале XX века теория относительности. Одна из фундаментальных идей этой теории – толкование реального пространства как неевклидова пространства переменной кривизны /зависящей от распределения массы в пространстве/.

Создание теории относительности связано с именем Эйнштейна и А. Пуанкаре.

Выводы теории относительности зачастую противоречат «общепринятому здравому смыслу», но, тем не менее, являются истинами, которые подтверждены экспериментально.

Исторически первым противоречием с «общепринятым здравым смыслом» были многие (непротиворечивые!) утверждения геометрии Лобачевского. С точки зрения современной геометрии пространство Лобачевского есть пространство постоянной отрицательной кривизны, в то время как реальное пространство общей теории относительности является пространством переменной кривизны.

Из выше сказанного вытекает органическая связь между двумя великими достижениями человеческого разума – геометрией Лобачевского и теорией относительности Эйнштейна. При этом геометрия Лобачевского предшествовала теории относительности не только во времени, но и в идейном отношении.

Таким образом, аксиоматический метод и аксиоматические исследования Лобачевского сыграли огромную роль в развитии геометрии как науки, а также нашли свое отражение и в теории познания, т.е. переоценить их значение невозможно.

Контрольные вопросы к разделу 1

1. Дайте определение прямого (декартова) произведения множеств.
2. Что называется n-арным отношением, определенным на множествах?
3. Приведите примеры унарных, бинарных и тернарных отношений.
4. Дайте определение математической структуры данного рода.
5. Поведите примеры математических структур алгебраического, порядкового и топологического типов.
6. Докажите содержательную непротиворечивость системы аксиом структуры 4-мерного векторного пространства над полем.
7. Приведите примеры изоморфных структур и автоморфизмов структур.
8. Дайте определение структуры евклидова и псевдоевклидова точечно-векторного пространства в аксиоматике Вейля.
9. В чем заключается сущность аксиоматического метода построения теории?
10. Раскройте содержание требований (непротиворечивости, независимости, полноты), предъявляемых к системе аксиом, определяющей структуру данного рода?
11. В чем состоит основная идея доказательства непротиворечивости системы аксиом Лобачевского?
12. Раскройте смысл и значение аксиоматического метода в развитии геометрии и теории познания.

Раздел 2: ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР ОБОСНОВАНИЯ ГЕОМЕТРИИ

§2.l. Геометрия до Евклида. «Начала» Евклида. Критика «Начал»

Геометрия возникла в ходе трудовой деятельности человека. Самая крупная река земного шара – Нил. Египетский фараон своим подчиненным выделял земельные участки за подать. Но Нил разливался, и участки менялись. Возникла необходимость измерять участки.

Систематическое изложение геометрии дано в 13 книгах «Начал» Евклида (III – II в. до н.э.). Современников до сих пор поражает всесторонность этого исследования. До 1700 – 1800 г. геометрию Евклида считали незаменимой.

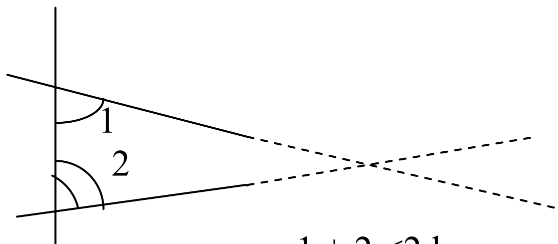
Собственно геометрии в «Началах» посвящены 8 книг. В остальных излагается арифметика. Теория конических сечений, кривых высших порядков – были известны во времена Евклида, но в его книгах не изложены.

Евклид не признавал неопределяемых (первичных) понятий, и в этом его минус. Он определял: ***точка*** есть то, что не имеет частей; ***линия*** есть длина без ширины; ***граница линии*** суть точка, ***прямая*** есть та линия, которая одинаково расположена относительно всех своих точек; ***поверхность*** есть то, что имеет только длину и ширину; ***граница поверхности*** суть линия; ***плоскость*** есть поверхность, которая одинаково расположена по отношению ко всем прямым, на ней лежащим, ***параллельные*** суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены, не пересекаются ни с одной стороны, ни с другой.

Первичные утверждения (принимаемые без доказательства) Евклид делит на постулаты и аксиомы:

Постулаты Евклида

1. *От всякой точки до всякой точки можно провести прямую.*
2. *Ограниченную прямую можно продлить в неограниченную.*
3. *Из любого центра можно провести окружность любого радиуса.*
4. *Все прямые углы равны*



1 + 2 <2d

5. (основной) ***Если две прямые при пересечении с третьей образуют с одной стороны внутренние односторонние углы, сумма которых меньше 2d, то эти прямые пересекаются при их достаточном продолжении с этой стороны.*** $(d=\frac{\Pi}{2})$

Аксиомы Евклида

1. *Равные одному и тому же равны между собой.*
2. *Если к равным прибавить равные, то получим равные.*
3. *Если от равных отнимем равные, то получим равные.*

…………………………………………………………………………

7.Совмещающиеся друг с другом равны между собой.

Затем Евклид начинает развивать свою логическую дедуктивную (от общего к частному) систему. Свою геометрию Евклид подразделил на две части:
1 часть – без использования 5 постулата.

Определение: *Геометрия, построенная на аксиомах Евклида без 5 постулата, называется* ***абсолютной.***

В этой геометрической системе содержится *конечное* число теорем (логических следствий из аксиом и постулатов). В трактовке Евклида их 29. Евклид добавляет пятый постулат. В этой системе (в ***евклидовой геометрии***) количество логических следствий *бесконечно.*

Основные недостатки «Начал» Евклида.

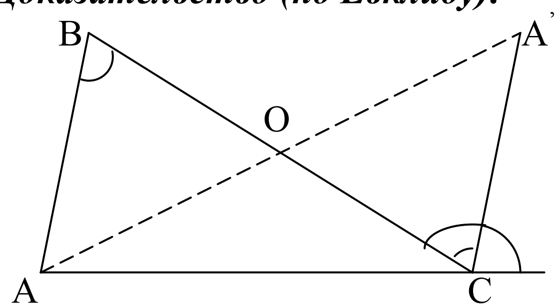
Наиболее слабое место – это **определения**:

1. Евклид пытается определить исключительно все понятия.
2. Определения, которые даёт Евклид, нечётки, логически неоправданны.
3. Система аксиом неполная. У него нет аксиомы непрерывности (немецкий математик Дедекинд). Отсутствуют аксиомы движения
4. Система аксиом и постулатов зависима: 4-ый постулат лишний – равенство углов можно доказать из остальных постулатов.
5. Убедительность логики Евклида во многих случаях подкрепляется привычками наших пространственных представлений. А это значит, что «Начала» логически безукоризненного обоснования геометрии не содержат.

На недостатки Евклида указывал уже Архимед (жил на 100 – 150 лет позднее Евклида). Для того, чтобы сравнивать отрезки, он ввёл свою **аксиому Архимеда:**
Для любых двух отрезков а и в(в<а) существует пє N, такое что пв >а.

§2.2. Пятый постулат Евклида и его эквиваленты

В абсолютной геометрии (без использования 5 постулата) можно доказать:
1) признаки равенства треугольников; 2) в равнобедренном треугольнике углы при основании равны;3) теорему о внешнем угле треугольника: ***каждый из внешних углов треугольника больше любого внутреннего, с ним не смежного.***
Доказательство (по Евклиду):

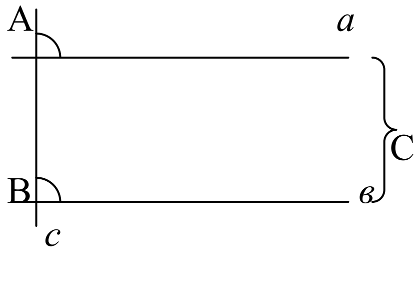


(BC, O) = 1; AO = OA'. Тогда треугольник ABO равняется треугольнику A'OC (по двум сторонам и углу между ними), следовательно, < ABO = =<OCA', Но угол OCA' составляет часть внешнего угла при вершине C. Следовательно, теорема доказана.

Последний момент (что угол OCA' – часть угла C) устанавливается из наглядности чертежа, т.к. аксиомы Евклида не дают возможности точно обосновать понятия « между», «внутри» и т.д. Кроме того, в доказательстве использовалось понятие равенства треугольников, которое не обосновано, т.к. не определено движение у Евклида. Таким образом, приведённые рассуждения существенно подкрепляются наглядностью чертежа.

Далее можно определить **параллельные:** *две прямые называются параллельные, если они не имеют общей точки.*

Докажем (по Евклиду) существование параллельных прямых. Достаточно доказать, что две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны.



Действительно, пусть прямые *a* и *в* составляют с прямой *c* прямые углы. Предположим, что они пересекаются в точке C. Тогда для треугольника ABC по теореме о внешнем угле $\angle A > \angle B$, что противоречит положению.

Отсюда следует, что через любую точку M плоскости можно провести прямую, параллельную к $u \notin M$

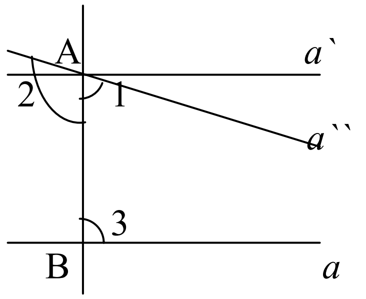
Для этого достаточно опустить перпендикуляр MN к u и в точке M провести u\`

N u перпендикулярно MN. На основании предыдущего прямая u\` параллельна прямой u.

После этого, естественно, должен быть решён вопрос: проходит ли через каждую точку плоскости только одна прямая, параллельная данной, или таких прямых существует множество.

Теорема 2.2.1: *Через каждую точку A, не принадлежащую прямой a, проходит единственная прямая, параллельная прямой a, если справедлив 5- ый постулат Евклида.*

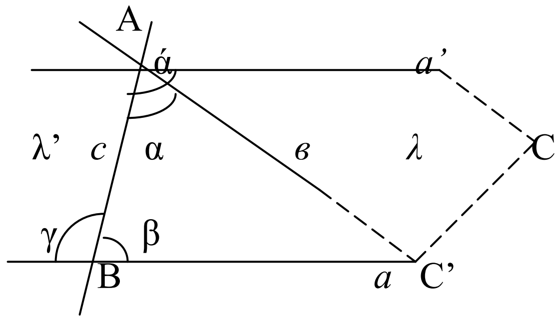
Доказательство:



AB $\perp$ *a,* через точку A *a*\` $\perp$ AB;=> *a*\` || *a*. Через точку A проведём *a*\`\`$\neq$ *a*\` => $\angle 1$ или $\angle 2$ – острый; Пусть $\angle 1$ – острый, => при пересечении двух пар прямых *a* и *a*\` третьей AB получим $\angle 1 + \angle 3 < 2d$ => прямые пересекаются

Теорема 2.2.2. (обратная) **:** *Если принять, что через каждую точку A, не принадлежащую прямой a, проходит только одна прямая, параллельная прямой a, то справедлив 5-ый постулат Евклида.*

Доказательство:



Пусть даны прямая *a* и не принадлежащая этой прямой точка A. Через точку A проведём прямые *c* и *в,* $c \cap a$=B; β- острый из смежных углов; γ - тупой. Прямая *в* такая, что $\alpha + \beta < 2d$

Т.д.: прямая *в* пересекает прямую *a* (т.е. прямая *в* не параллельна прямой *a)*, причём точка $в \cap a$ лежит в полуплоскости *λ*, с границей *c,* в которой лежат углы β и α. Проведём прямую *a’* так, что $ά + \beta = 2d$. Тогда

$$\left.\begin{aligned} ά + \beta &= 2d \\ \alpha + \beta &< 2d \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha < ά \Rightarrow \underline{в \neq a’}$$

$\left.\begin{array}{l}\gamma + \beta = 2d \\ \acute{\alpha} + \beta = 2d\end{array}\right\} \Rightarrow \acute{\alpha} = \gamma \Rightarrow a' \parallel a$ (если предположить, что *a'* и *a* пересекаются в некоторой точке C, то в треугольнике ABC внешний угол γ равен одному из внутренних углов, не смежных с ним, что противоречит теореме о внешнем угле треугольника, при доказательстве которой 5-ый постулат не используется).

Т.к. параллельная прямая *a'* единственна по условию, то т.к. $в \neq a'$, то $в \cap a$. Осталось доказать, что $в \cap a$ принадлежит λ.

$\alpha < \acute{\alpha}$; $\acute{\alpha} = \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$.

Предположим противное: прямые *в* и *a* пересекаются в полуплоскости λ'. Тогда в треугольнике ABC внешний угол α меньше внутреннего γ, не смежного с ним. Получили противоречие с теоремой о внешнем угле треугольника. Следовательно, $a \cap в$ принадлежит λ.

Теорема доказана.

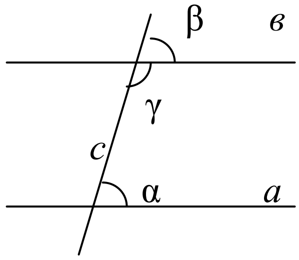
Аксиома параллельности является современной формой 5-го постулата Евклида, введённой в практику преподавания **Дж. Плейфером** (1748 – 1819).

Замечание: Из теорем 1 и 2 следует*: 5-ый постулат эквивалентен следующему утверждению (**постулату Плейфера**): существует не более одной прямой , параллельной данной прямой а и проходящей через данную точку А, не принадлежащую прямой а.*

(Существование параллельной прямой не постулат, т.к. оно доказывается).

Теорема 2.2.3.: *Если справедлив 5-ый постулат Евклида, то при пересечении двух параллельных прямых третьей соответственные углы равны.*

***Доказательство*:**



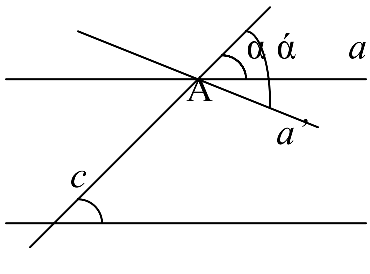
Предположим противное: пусть $\left.\begin{array}{r}\alpha \neq \beta \\ \beta + \gamma = 2d\end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha + \gamma \neq 2d$. Напротив, $\alpha + \gamma < 2d$ $в \cap a$

противоречит условию.

Теорема 2.2.4.: *Если при пересечении двух параллельных прямых третьей соответственные углы равны, то справедлив 5-ый постулат Евклида.*

Доказательство:



Дано**:** $\alpha = \beta$; $a \parallel в$

$a \cap c = A$;

Пусть $a' \parallel в$ и проходит через точку А;

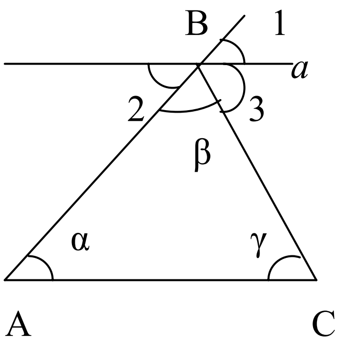
прямая *a'* с *c* образует угол ά. По условию

β *в* $\acute{\alpha} = \beta \Rightarrow \alpha = \acute{\alpha} \Rightarrow a = a'$.Следовательно, имеет место аксиома параллельных прямых, эквивалентная 5-му постулату.

Из теорем 3 и 4 следует, что 5-ый постулат Евклида эквивалентен утверждению: *при пересечении двух параллельных прямых третьей соответственные углы равны.*

***Теорема 2.2.5.*: *Если имеет место 5-ый постулат Евклида, то сумма углов любого треугольника равна* 2d.**

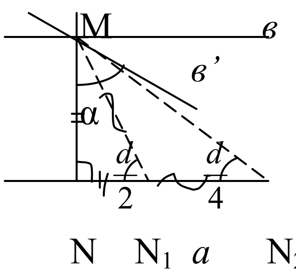
Доказательство:



Через вершину B проведём $a \parallel AC$. По эквивалентности 5-го постулата $\alpha = 1 = 2$; $\gamma = 3$. Следовательно, $\alpha + \beta + \gamma = 2 + \beta + 3 = 2d$

Теорема 2.2.6. **(**Нассир – Эддина – Туси**,** азерб. математик 13 века **):** *Если сумма углов любого треугольника равна* 2d, *то справедлив 5-ый постулат Евклида.*(доказал Лежандр)

Доказательство:



$MN \perp a$; $в \perp MN \Rightarrow в \parallel a$, $в' \neq в \Rightarrow \alpha$ – <u>острый</u> или тупой угол; <u>$\alpha < d$</u>

$MN = NN_1$; $MN_1 = N_1N_2$; … ; $MN_{n-1} = MN_n \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MN_nN = \frac{d}{2^n}$; $\Rightarrow \angle NMN_n = d - \frac{d}{2^n}$;

По условию $\alpha < d \Rightarrow$ существует n такое, что $\angle NMN_n > \alpha \Rightarrow$ *в'* лежит внутри $\angle NMN_n$, т.е. *в'* пересекает отрезок NN_n, т.е. *в'* и *a* пересекаются. Т.е. справедлива аксиома параллельных.

Теорема доказана.

Из теорем 2.2.5 и 2.2.6 следует, что 5-ый постулат Евклида имеет эквивалент:

Сумма внутренних углов любого треугольника равна 2d.

Другие эквиваленты:

- Существует прямоугольник;
- Существует треугольник, сумма углов которого равна 2d;

- Существует пара неравных треугольников ABC и A'B'C' с равными углами $\angle A'$, $\angle B'$, $\angle C'$.
- Теорема Пифагора

Со временем Евклида и до конца 19 века было множество попыток доказать 5-ый постулат (О. Хойям – 1048–1023г.г.; Лежандр – 17520–1833г. и др.). Обычно автор доказательства незаметно для себя опирался на некоторое допущение, которое оказывалось ещё одним эквивалентом 5-го постулата. Попытки были бесплодными, но был получен ряд верных результатов, наиболее чёткое доказательство которых было дано **Лежандром**.

Теорема2.2.7. **(**первая теорема Саккери – Лежандра): *Сумма углов любого треугольника меньше или равна* 2d.

Теорема2.2.8. **(**вторая теорема Саккери – Лежандра): *Если в одном треугольнике сумма углов равна* 2d, *то сумма углов любого другого треугольника равна* 2d.

Следствие: *Если в одном треугольнике сумма углов меньше 2d, то сумма углов всякого треугольника меньше 2d.*

§2.3. Система аксиом Гильберта (обзор). Обоснование евклидовой геометрии по Гильберту

Со времён Евклида не прекращались попытки уточнять основные положения геометрии. Однако на протяжении многих веков к обоснованию геометрии никто не прибавил ничего принципиально нового сверх то, что уже было сделано Евклидом. Строгость евклидовых доказательств до 19 века казалась достаточной. Только в конце 19 века оформились воззрения на принципы логического построения геометрии.

В 1899 году вышла в свет книга Д. Гильберта «Основания геометрии». В ней впервые был дан список аксиом, достаточный для логического построения евклидовой геометрии. Полные списки аксиом евклидовой геометрии составлялись и до Гильберта, но не такие совершенные.

По Гильберту, **база** структуры евклидова пространства состоит из 3-х множеств: E, F, G. E – множество точек; $\{A, B, C, \ldots\}$, F – множество прямых $\{a, в, c, \ldots\}$, G – множество плоскостей $\{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$.

На этих множествах заданы 3 отношения: бинарное «принадлежит»; тернарное «лежит между»; бинарное «равно», которые удовлетворяют следующим 20 аксиомам, разбитым на 5 групп.

1-ая группа аксиом (аксиомы принадлежности)*:

1.1 *Каковы бы ни были 2 точки* $A, B \in E$, *существует прямая* $a \in F$,

---

* Предполагается, что точки, прямые и плоскости связаны бинарным отношением.

проходящая через эти точки. Такая прямая a единственна (свойство относительно принадлежности)

1.2 *На каждой прямой* $a \in$ F *лежат по крайней мере 2 точки* A, B $\in$ E.

1.3 *Существуют по крайней мере 3 точки, не лежащие на одной прямой.*

1.4 *Существует единственная плоскость, проходящая через 3 точки, не лежащие на одной прямой.*

1.5 *На каждой плоскости лежит хотя бы одна точка.*

1.6 *Если две точки* A *и* B *прямой a лежат в плоскости* α, *то любая точка прямой a лежит в плоскости* α. (*В этом случае говорят: a лежит в плоскости* α, *или плоскость* α *проходит через прямую a).*

1.7 *Если две плоскости* α *и* β *имеют юдну общую точку* A, *то они имеют по крайней мере ещё одну общую точку* B.

1.8 *Существуют по крайней мере четыре точки, не лежащие в одной плоскости.*

Замечание: *Исходя из этих аксиом, можно доказать ряд теорем, большинство из которых в школьном курсе геометрии не доказываются (очевидны), например:*

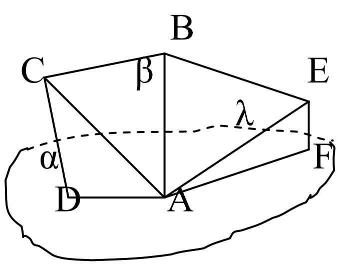
Теорема 2.3.1: *Две прямые имеют не более одной общей точки.*

***Теорема 2.3.2*:** *Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат се общие точки этих двух плоскостей.*

Теорема2.3.3: *Через прямую и не лежащую на ней точку, так же как через две пересекающиеся прямые, проходит одна и только одна плоскость.*

Теорема 2.3.4: *На каждой плоскости существуют три точки, не лежащие на одной прямой.*

Доказательство:



Пусть дана плоскость α; по аксиоме **1.5,** α содержит некоторую точку A; по аксиоме **1.8,** существует точка B$\notin$ α. **1.3** => существует точка C$\notin$AB; плоскости ABC и α имеют общую точку A; **1.7** => плоскости ABC и α имеют ещё одну общую точку D$\notin$AB. Т.о., в плоскости α, кроме точки A, необходимо содержится точка D$\neq$A; **1.8** => существует точка E$\notin$ABD; **1.4** => существует плоскость ABE$\neq$ABD; **1.7** => плоскости ABE и α имеют ещё одну общую точку F$\neq$A; **1.6** => F$\notin$AB (если предположить, что F$\in$AB, то F$\in$ABD). Т.о. D$\notin$AB и F$\notin$AB => по **теореме2,** D и F не являются общими точками плоскостей ABC и ABE => D и F – различны. Т.о., в плоскости α существуют 3 различные точки A, D, F; предположим, что они коллинеарны, по аксиоме **1.6** получили противоречие (F$\notin$ABC). Если предположим, что F$\in$ABC, то через точки A, B, F проходят две различные плоскости: ABC и ABE – противоречие аксиоме **1.4**

Теорема доказана.

При доказательстве теорем элементарной геометрии в рассуждениях совершенно исключены обращения к чертежу и наглядной очевидности; каждое рассуждение объясняется ссылкой на аксиомы и ранее доказанные теоремы, что соответствует принципам дедуктивно–аксиоматического метода построения теории **Гильберта.**

Около 1830 года почти одновременно Я. Бойаи и Н.И. Лобачевский представили систематическое построение неевклидовой геометрии. Однако вера в необходимость 5-го постулата Евклида укоренилась в умах математиках настолько, что теории Бойаи и Лобачевского вызвали недоверие и возмущения.

Полемика продолжалась до 1870 года, когда удалось наконец установить непротиворечивость неевклидовой геометрии: были построены модели этой геометрии **Э. Бельтрами (**1835 – 1900); **Ф**. **Клейном** (1849 – 1925) и **А. Пуанкаре** (1854 – 1912), что показало, что геометрия Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива аксиома вещественных чисел.

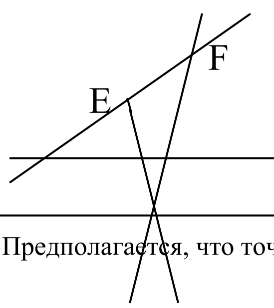
<u>2-ая группа аксиом</u> (аксиомы порядка)*:

2.1 *Если* μ(ABC*), то* A, B, C *– три различные точки одной прямой и* μ(CBA*).*
2.2 *Для любых двух точек* A,B$\in$E, *существует по крайней мере одна точка* C *на прямой* AB*, токая, что* μ(ABC*).*
2.3 *Из трёх различных точек прямой не более одной точки лежит между двумя другими.*
2.1 – 2.3 – линейные аксиомы порядка.
Далее можно доказать обычное определение отрезка AB={A,B}U{M$\in$E/ μ(ABC)}.
Относится к   фигур на плоскости.
2.4 (аксиома Паша) *Пусть точки* A, B, C *не лежат на одной прямой, а – прямая в плоскости* ABC, *не проходящая ни через одну из точек* A,B *или* C. *Тогда, если прямая а проходит через внутреннюю точку отрезка* AB*, то она проходит также через внутреннюю точку отрезка* AC *или через внутреннюю точку отрезка* BC.

Следствия из аксиом порядка и принадлежности:

1) *Каковы бы ни были точки* A *и* C*, существует по крайней мере одна точка* D *прямой* AC*, такая, что* μ(ADC*)*

Доказательство:



По аксиоме **1.3** существует, по крайней мере одна точка E$\in$AC; из **2.2** => на AE существует точка F такая, что μ(AEF); на FC существует точка G*,* такая, что μ(FCG); тогда по **2.3** G не лежит

* Предполагается, что точки прямой находятся в отношении порядка «лежать между».

A D C между F и C, т.е. G не принадлежит отрезку FC.
G По аксиоме Паша **2.4,** прямая EG должна пересекать отрезок AC или FC. Но если предположить, что EG пересекает FC, то по аксиоме **1.1** точки F, C, G, E, A лежат на одной прямой, что противоречит положению (A, C, E не лежат на одной прямой). Следовательно, EG пересекает AC в точке D.

Следовательно, существует точка D, такая, что μ(ADC).

Следствие доказано.

2) *Среди любых 3-х точек* A, B, C *одной прямой всегда существует одна, лежащая между 2-мя другими*
3) *Если некоторая прямая а пересекает каких – либо два из трёх отрезков* AB, BC *и* AC*, то она не пересекает третий.*
4) *Между любыми двумя точками существует большое множество других её точек.*

Определение **луча** по Гильберту.

Пусть O *– некоторая точка прямой а,* A, B *–*
O A B *a* *две другие точки. Если* O *не лежит между* A *и* B*, то точки* A *и* B *расположены на прямой а* ***по одну сторону от точки О***.

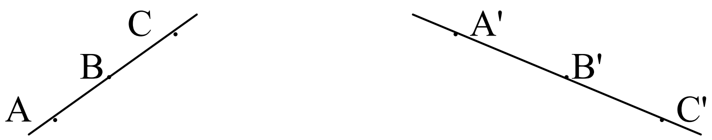
Определение: *Лучом или полупрямой с началом в точке* O *называются все точки прямой а, лежащие с некоторой точкой* A *по одну сторону от точки* O.

3-ья группа аксиом (аксиомы конгруэнтности)*:

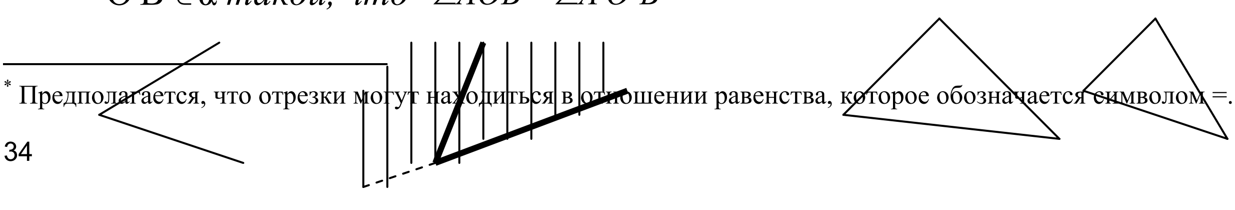
3.1 *Если даны отрезок* AB *и луч, исходящий из точки* A'*, то существует точка* B'*, принадлежащая данному лучу, такая, что* AB = A'B' *(единственность точки* B' *можно доказать).*

3.2 *Если* A'B'= AB *и* A''B''= AB*, то* A'B'= A''B''.

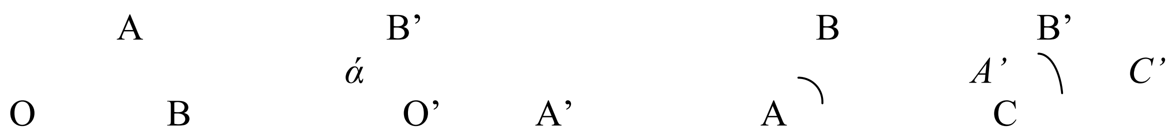
3.3 *Пусть* μ(ABC) *и* μ(A'B'C'), AB = A'B'; BC = B'C'*, тогда* AC = A'C'.



3.4 *Пусть даны выпуклый угол* AOB*, луч* O'A' *и полуплоскость ά, ограниченная прямой* O'A'. *Тогда существует единственный луч* O'B'∈α *такой, что* $\angle AOB = \angle A'O'B'$



* Предполагается, что отрезки могут находиться в отношении равенства, которое обозначается символом =.

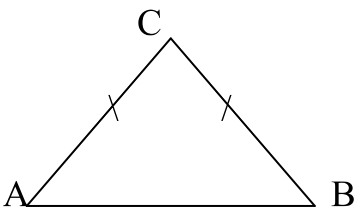


3.5 *Если для двух треугольников имеем:* AB = A'B'; AC = A'C';
$\angle BAC = \angle B'A'C'$, *то* $\angle ABC = \angle A'B'C'$

<u>Следствия из аксиом равенства (3-ья группа)</u>

1) *В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.*

Доказательство:



Рассмотрим Δ CAB и ΔCBA: $\left.\begin{array}{l} CB = CA \\ BC = AC \\ \angle ACB = \angle BCA \end{array}\right\} \Rightarrow$

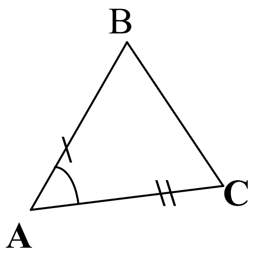
=> из **3.5** => $\angle CAB = \angle CBA$

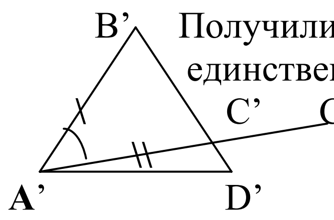
Определение: ΔABC = Δ A’B’C’, если AB = A’B’, BC = B’C’, AC = A’C’, $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$

2) *Если для* ΔABC *и* Δ A’B’C’ AB = A’B’, BC = B’C’*и* $\angle A = \angle A'$, *то* ΔABC = = ΔA’B’C’

Доказательство:

По аксиоме **3.5** $\angle B = \angle B'$; $\angle C = \angle C'$. Осталось доказать, что BC = B’C’. Предположим, что BC $\neq$ B’C’. Тогда по аксиоме **3.1** на луче B’C’ существует точка D такая, что B’D’ = BC. Тогда лучи A’C’ и **A**’D’ – различны. По аксиоме **3.5** $\angle B'A'D' = \angle BAC$, но $\angle B'A'C' = \angle BAC$. Получили противоречие требованию единственности в аксиоме **3.4.** Следовательно, BC = B’C’.



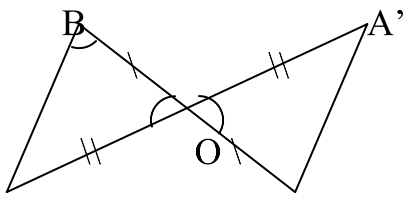


3)*Если для* ΔABC *и* ΔA’B’C’, AB = A’B’ $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, *то* ΔABC = = ΔA’B’C’

4) *Если для* ΔABC *и* ΔA’B’C’, AB = A’B’, BC = B’C’, AC = A’C’, *то* ΔABC = ΔA’B’C’

5) *Внешний угол треугольника больше всякого внутреннего, не смежного с ним.*

Доказательство:



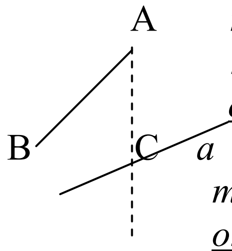
Отрезок BC разобьем точкой O пополам и отложим на луче AO OA’ = AO. ΔAOB = = ΔA’OC (по 1-ому признаку). Следовательно, $\angle OCA' = \angle B$; μ(AOA’) => A’ – внутренний

$\angle BAC$ и A'– внутренний $\angle BCA \Rightarrow \angle BCA' < \angle BCK$

A C K

Теорема доказана.

***Определение2.3.1.*:** Пусть a – некоторая прямая плоскости α. *Если точки* A, B *принадлежат плоскости* α *такие, что отрезок* AB *не пересекает прямую a, то говорят:* A *и* B *<u>лежат по одну сторону от прямой a</u>; если точки* A *и* C *принадлежат плоскости* α, *такие, что отрезок* AC *имеет внутреннюю точку на прямой a, то* A *и* C *<u>лежат по разные стороны от прямой a</u>.*



***Определение 2.3.2.* :** *Множество всех точек плоскости, лежащих по одну сторону от прямой a с некоторой точкой* A, *называется <u>полуплоскостью с границей a</u>.*

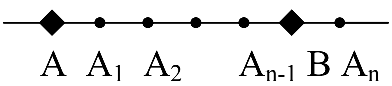
Определение2.3.3.: *Пара полупрямых h, k, выходящих из одной и той же точки* O *и не принадлежащей одной прямой, называется <u>углом.</u>*

***б) <u>Теорема о внутреннем луче угла</u>*:** *если луч исходит из вершины угла и имеет хотя бы одну внутреннюю точку, то он пересекает любой отрезок с концами на разных сторонах угла.*

<u>4-ая группа аксиом</u> (аксиомы непрерывности):

4.1 (аксиома <u>Архимеда</u>): Пусть AB и CD – какие – либо отрезки. *Тогда на прямой* AB *существует конечное множество точек* $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *удовлетворяющих условиям:*

C D



а) μ $(A\ A_1\ A_2)$; μ$(A_1\ A_2\ A_3)$;...

б) $A A_1 = A_1 A_2 = \ldots = A_{n-1} A_n = CD$

в) μ $(A\ B\ A_n)$

(*или для любых* AB > CD *существует* $n \in N$ *такое, что n* CD > AB)

4.2 (аксиома <u>Кантора</u>): *Пусть на прямой a дана бесконечная последовательность отрезков* A_1B_1, A_2B_2,..., *такая, что каждый последующий есть часть предыдущего и для любого наперёд заданного*

A_1 A_2 B_2 B_1

отрезка CD *найдётся* $n \in N$ *такое, что* $A_nB_n <$ CD. *Тогда на прямой a существует точка M, принадлежащая каждому из отрезков* $\{A_nB_n\}$. (Можно доказать единственность точки M методом от противного)*

* Если предположить, что N также принадлежит A_nB_n , то для любого $n \in N$ MN< A_nB_n. Получили противоречие аксиоме Кантора.

Можно доказать, что аксиомы **4.1 – 4.2** при сохранении **1 – 3** эквивалентны следующему **предложению Дедекинда**: Пусть даны разбиения точек отрезка АВ на два класса $К_1$ и $К_2$ (т.е. $К_1 \cup К_2$ = АВ и $К_1 \cap К_2 = \varnothing$), удовлетворяющие двум условиям:

1. А $\in К_1$ *и* В $\in К_2$ *и классы* $К_1$ *и* $К_2$ *содержат также точки, отличные от* А *и* В.
2. *любая точка класса* $К_1$, *отличная от* А, *лежит между точкой* А *и любой точкой класса* $К_2$.

Тогда существует точка $М_0$ *отрезка* АВ, *такая, что если для любого* Х $\in$АВ, *если* μ(АХ$М_0$), *то* Х $\in К_1$*; если* μ($М_0$ХВ*), то* Х $\in К_2$.

Это разбиение называется **дедекиндовым сечением.**

Точка $М_0$ единственна (легко доказать). Она производит это сечение.

5-ая группа аксиом (аксиома параллельности):

Пусть на плоскости дана прямая *а* точка А$\notin$*а. Тогда в этой плоскости существует не более одной прямой, проходящей через точку* А *и не пересекающей а.*

Замечание:1) *Ранее было доказано, что* ***аксиома 5*** *эквивалентна* ***5-ому постулату*** *Евклида.*

2) *Используя аксиомы непрерывности, можно установить, что существует биекция множества точек прямой на множество* R *действительных чисел, сохраняющая порядок (*σ*: а* → R *по правилу для любой точки* А $\in$*а, σ(*А*)* =х*;* *если* А *правее* В, *то* σ(А)> σ(В).

Т.о., точки прямой расположены непрерывно одна за другой, как и числа в множестве R, *т.е. образуют однокамерный континуум. Пусть* $\sum'$ *и* $\sum''$ *– 2 системы аксиом.*

3) Определение2.3.4.: *Две системы аксиом* $\sum'$ *и* $\sum''$ *называются* *эквивалентными, если в теорию* $Г(\sum')$ *справедливы все предложения из* $\sum''$*, и в теорию* $Г(\sum'')$ *справедливы все предложения из* $\sum'$.

В этом случае имеем одну теорию $\mathbf{Г(\sum') = Г(\sum'')}$**.**

Удачный выбор системы аксиом из эквивалентных систем может значительно упростить построение соответствующей теории.

Можно доказать: *системы* $\sum_w$ *(система аксиом Вейля) и* $\sum_H$ *(Гильберта) эквивалентны.*Обе они определяют структуру трёхмерного евклидова пространства $Е_3$.

3) С современной точки зрения аксиоматика **Г**ильберта представляется чрезвычайно сложной и громоздкой; внутренне она не связана с понятием векторного пространства. В 1918 году немецкий математик **Герман Вейль** предложил свою аксиоматику, основанную на применении векторного пространства. Она содержит 15 аксиом: аксиомы 1-2 Вейля аффинного пространства; 8 аксиом векторного пространства; 1 «аксиома размерности» и 4 аксиомы билинейной формы g: VxV→R.

$$
\left.\begin{array}{rl}
\text{I.} & \forall(A \in E_3)\forall(\vec{a} \in V)\exists!(B \in E_3) / \vec{AB} = \vec{a} \\
\text{II.} & \forall(A,B,C \in E_3) : \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}
\end{array}\right\} \text{аксиомы в аффинном пространстве}
$$

$$
\left.\begin{array}{rl}
\text{III.} & \vec{a} + \vec{в} = \vec{в} + \vec{a} \\
\text{IV.} & (\vec{a} + \vec{в}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{в} + \vec{c}) \\
\text{V.} & \exists\vec{0} / \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \\
\text{VI.} & \forall\vec{0}\exists(-\vec{a}) / \vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0} \\
\text{VII.} & \forall\vec{a}\ 1 \bullet \vec{a} = \vec{a} \\
\text{VIII.} & \alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a} \\
\text{IX.} & (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \\
\text{X.} & \alpha(\vec{a} + \vec{в}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{в}
\end{array}\right\} \text{аксиомы векторного пространства}
$$

$$
\text{XI.}\quad \exists\vec{a},\vec{в},\vec{c} / \alpha\vec{a} + \beta\vec{в} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0 \ \text{(аксиома размерности)}
$$

$$
\left.\begin{array}{rl}
\text{XII.} & g(\vec{a},\vec{в}) = g(\vec{в},\vec{a}) \\
\text{XIII.} & g(\vec{a},\vec{в} + \vec{c}) = g(\vec{a},\vec{в}) + g(\vec{a},\vec{c}) \\
\text{XIV.} & g(\alpha\vec{a},\vec{в}) = \alpha g(\vec{a},\vec{в}) \\
\text{XV.} & \textit{Если}\ \vec{a} \neq \vec{0}, \textit{то}\ g(\vec{a},\vec{a}) \rangle 0
\end{array}\right\} \text{аксиомы скалярного произведения}
$$

Мы же ранее определяли структуру евклидова пространства по Вейлю, исходя из того, что структура векторного пространства V над полем R уже известна. Это упростило форму аксиоматики Вейля.

§2.4. Лобачевский и его геометрия. Аксиома Лобачевского

Н.И. Лобачевский (1792 – 1856г) родился в Нижнем Новгороде, окончил Казанский университет, оставлен там преподавателям, стал профессором.

7 февраля 1826 года представил физико-математическому факультету Казанского университета доклад по теории параллельных «Рассуждения о принципах геометрии». Издал ряд сочинений по геометрии.

Лобачевский первым в своих работах чётко сформулировал и обосновал, что **5-ый** постулат Евклида нельзя вывести из остальных аксиом геометрии Евклида. Лобачевский отвергает этот постулат и заменяет его аксиомой Лобачевского **5*:** *Пусть даны прямая а и точка* A$\notin$*а. Тогда в плоскости (*A*,а) существует не менее двух прямых, проходящих через точку* A *и не пересекающих прямую а.*

Используя аксиому **5*** и все аксиомы Евклида, кроме **5-го** постулата, Лобачевский строит свою (гиперболическую) геометрию на плоскости и в пространстве, находит формулы тригонометрии и даёт приложение анализа к геометрии. Желая доказать непротиворечивость своей геометрии, Лобачевский даёт её аналитическое истолкование: он вычислил многие интегралы, которые до него не были вычислены.

<u>Простейшие факты геометрии Лобачевского на плоскости в схеме Гильберта</u> (следствия аксиом системы $\Sigma^* = \Sigma' \cup \{5^*\}$).

Теорема 2.4. 1: *Во всяком треугольнике* ABC *сумма внутренних углов* $\sigma_{ABC} < 2d$.

Доказательство:
По 1-ой теореме Саккери-Лежандра $\sigma_{ABC} \le 2d$. Предположим, что $\sigma_{ABC} = 2d$ => (т.к. это эквивалентно **5-му** постулату Евклида) справедлив **5-ый** постулат Евклида, что противоречит **5^*.** Следовательно, $\sigma_{ABC} < 2d$.
Теорема доказана.

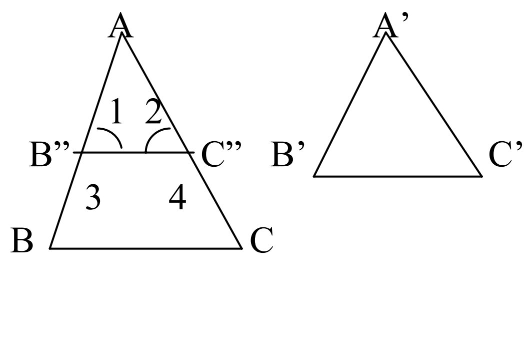
Следствие: *Во всяком простом четырёхугольнике сумма внутренних углов меньше 4d.*
Теорема 2.4.2: *Сумма углов треугольника непостоянна, т.е. не одна и та же для всех треугольников.*

Доказательство:
Предположим противное: сумма σ постоянна. Пусть C', A' – внутренние точки соответственно AB и BC.

$\sigma_{A'BC'} = \sigma_{ABC}$ (по предположению); т.е.
$\acute{\alpha} + \gamma' + \beta = \alpha + \gamma + \beta$; => $\underline{\acute{\alpha} + \gamma' = \alpha + \gamma}$ (1)
($\acute{\alpha} + \varphi = 2d$; $\gamma' + \psi = 2d$) =>
$(\acute{\alpha} + \gamma') + (\varphi + \psi) = 4d$ (2)
(1), (2) => $\alpha + \gamma + \varphi + \psi = 4d$, т.е. в простом четырёхугольнике AC A' C' сумма внутренних углов равна 4d. Это противоречит следствию из **теоремы1**. Следовательно, $\sigma_{A'BC'} \neq \sigma_{ABC}$
(4-ый признак равенства треугольников)

Теорема 2.4.3: *Если 3 угла* ΔABC *соответственно конгруэнтны 3-ём углам* ΔA'B'C'*, то эти треугольники конгруэнтны.*

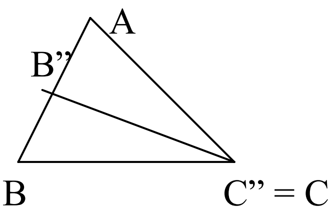
Доказательство:



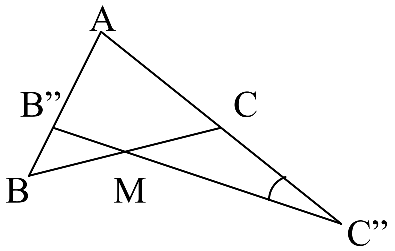
Предположим, что AB ≠ A'B' (AB>A'B')
Тогда существует точка B''$\in$[AB] такая, что AB'' = A'B' . На луче AC возьмём точку C'' такую, что AC'' = A'C'.Имеем: ΔAB''C'' = ΔA'B'C'(по 1-ому признаку).

Следовательно, $\underline{\angle 1 = \angle B; \angle 2 = \angle C}$ (3). Докажем, что $BC \cap B''C'' = \varnothing$.
Предположим противное: $BC \cap B''C''$=M. Возможны 2 случая: ***1)*** M = C;
2) μ(BMC).

1) Если M = C, то C" = C => $\angle 2 < \angle C$, что противоречит (3).



2) Если μ(BMC), то $\angle C = \angle 2$, что противоречит теореме о внешнем угле треугольника (ΔMCC")



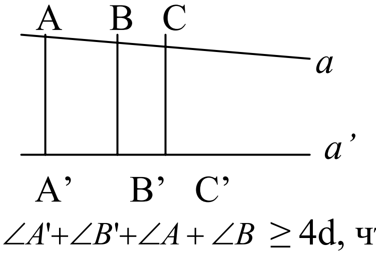
Следовательно, $BC \cap B''C'' = \varnothing$, следовательно, μ(AC"C) (по аксиоме Паша).
Имеем: $\angle 1 + \angle 3 = 2d; \angle 2 + \angle 4 = 2d \Rightarrow \angle 3 + \angle B = 2d$

$$\begin{array}{r} \angle 3 + \angle B = 2d \\ + \\ \underline{\angle C + \angle 4 = 2d} \\ \angle C + \angle B + \angle 3 + \angle 4 = 4d \end{array}$$

- что противоречит следствию из **теоремы1.** Следовательно,ΔABC = ΔA'B'C'(по 2-му признаку).
Теорема доказана.

Теорема 2.4.4: *Пусть прямые a и a' лежат в одной плоскости и не пересекаются,* A, B, C $\in a$ *и* μ(ABC*);* A', B' *– ортогональные проекции точек* A *и* B *на прямую a'. Тогда* $\angle A'AC < \angle B'BC$.

Доказательство:



Предположим противное: $\angle A'AC \geq \angle B'BC$

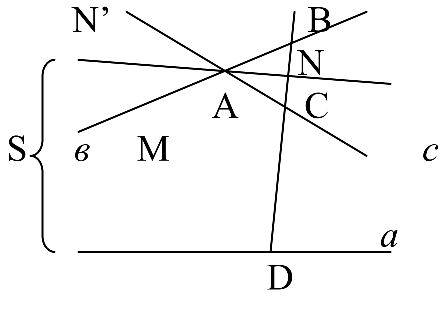
$\underbrace{\angle A'AC + \angle ABB'}_{2d}$=2d

Тогда в четырёхугольнике A'ABB': $\angle A' + \angle B' + \angle A + \angle B \geq 4$d, что противоречит **следствию** из **теоремы1**.
Теорема доказана.

Теорема 2.4.5: *Пусть на плоскости даны прямая а и точка* A $\notin a$. *Существует большое множество прямых этой плоскости, проходящих через точку* A *и не пересекающих прямую а.*

Доказательство:

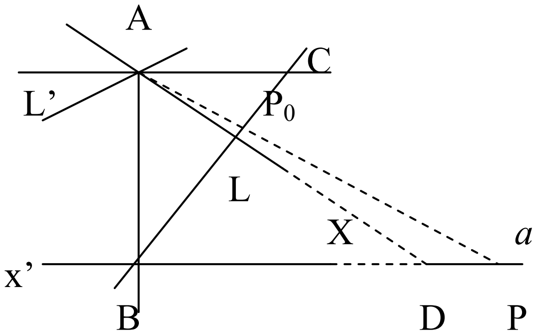
По аксиоме **5*** существуют 2 такие прямые: *в* и *с*.



Прямая *а* лежит в одной полуплоскости, ограниченной прямой *с*. Эта полуплоскость пересекает прямую *в* по лучу AM. На луче, дополнительном к AM, возьмём точку B. Точка B и прямая *а* лежат в разных полуплоскостях с границей *с*. Если D$\in a$, то BD пересекает *с* в точке C. Пусть N – внутренняя точка отрезка BC. Требуется доказать: $A\mathrm{N} \cap a = \varnothing$.

Предположим противное: предположим $A\mathrm{N} \cap a =$ S. Но луч AN и прямая *а* лежат в разных полуплоскостях. Следовательно, S$\in$AN'- доп. К AN лучу. К ΔNSD применим аксиому Паша: прямая *в* не проходит через точки N, S и D; $в \cap \mathrm{N}S = A$; *в* не пересекает ND => $в\cap$сторону SD => $в \cap a \neq \varnothing$. Это противоречит условию. Следовательно, $A\mathrm{N} \cap a = \varnothing$. Т.к. N – произвольная точка отрезка BC и их (внутренних точек BC) бесконечное множество (континуум), то ***теорема доказана.***

Возьмём на плоскости прямую *а* и точку A$\notin a$. Проведём $AB \perp a$ и $AC \perp AB$.



По **теореме5** существует большое множество прямых, проходящих через точку A и не пересекающих прямую *а*. AC$\in$ этому множеству. По теореме о внешнем луче треугольника: если прямая проходит через точку A и пересекает прямой угол BAC, то она пересекает отрезок BC. Точки отрезка BC разобьем на 2 класса: K_1 и K_2 по принципу:

$K_1 = \{M \in [BC] / AM \cap a \neq \varnothing$ } пересекает прямую *а*.

$K_2 = \{M \in [BC] / AM \cap a = \varnothing$ } не пересекает прямую *а*.

Можно показать, что указанное разбиение точек отрезка BC удовлетворяет всем условиям аксиомы Дедекинда, и на BC произведено дедекиндово сечение.

Пусть точка L производит это сечение. Докажем, что $L \in K_2$. Предположим противное: $L \in K_1$. Следовательно, AL пересекает прямую *а* в точке D$\subset$ лучу BX. Возьмём точку P$\in$BX и μ(BDP). Тогда $AP \cap LC = P_0$(по теореме о внутреннем луче угла); получили противоречие. Следовательно, $L \in K_2$.

Возьмём прямую AL' симметричную AL относительно AB.

Определение2.4.1: *Прямые* AL *и* AL' *называются* <u>*параллельными прямой а*</u>*, если они удовлетворяют следующим свойствам:*

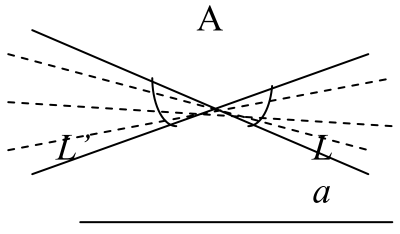
a) *они не пересекают прямой а;*
b) *все прямые пучка* π(A)*, проходящие внутри одной пары вертикальных углов, образованных* AL *и* AL'*, пересекают прямую а, а проходящие внутри другой пары – не пересекают прямую а.*

Определение2.4.2: *Угол* BAL *называется* <u>*углом параллельности*</u> *в точке* A *относительно прямой а.*

Замечания: 1) *На плоскости Лобачевского угол параллельности всегда острый.* ***2)*** *Говорят, что* AL *параллельна а в направлении* BX; AL' – *в направлении* BX'. ***3)*** *Через каждую точку* A$\notin$*а* <u>*проходят две прямые, параллельные прямой а*</u>*.*

Определение2.4.3: *Прямые а и в называются* <u>*расходящимися*</u> *(сверх параллельными), если они лежат в одной плоскости и не пересекаются и не параллельны.*

Замечания: 1) *Через точку* A *проходит большое множество прямых, расходящиеся с а. (Это все прямые пучка π(А), проходящие внутри заштрихованных вертикальных углов).*



а, в - расходящиеся

2) *Т.о., на плоскости Лобачевского существуют* <u>*три случая взаимного расположения прямых*</u>*: прямые пересекаются, параллельны или расходятся.*

Можно доказать следующие теоремы:

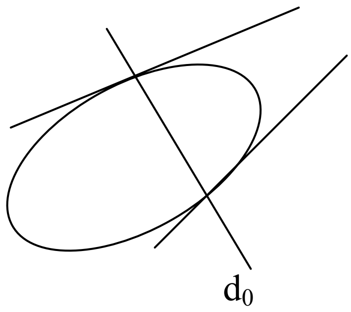
Теорема 2.4.6: *Две прямые, имеющие общий перпендикуляр, расходятся.*

Следствие: *Не существует общего перпендикуляра двух параллельных прямых.*

Теорема 2.4.7: *Любые две расходящиеся прямые имеют общий перпендикуляр.*

В 1868 году Бельтрами показал, что геометрия Лобачевского реализуется на псевдосфере.

Геометрию Лобачевского часто называют гиперболической, т.к. гипербола обладает на проективной плоскости с фиксированной прямой d_0 двумя несобственными точками и двумя асимптотами (касательными к овальной кривой в несобственных точках).



Прямая *в* плоскости Лобачевского также обладает двумя несобственными точками, в которых она пересекается с абсолютом.

Одну из поверхностей, на которой выполняется геометрия Лобачевского, можно получить вращением трактрисы вокруг оси абсцисс. Это так называемая **псевдосфера –** поверхность отрицательной кривизны в евклидовом пространстве, на которой локально реализуется геометрия плоскости Лобачевского**.** (рис.2).

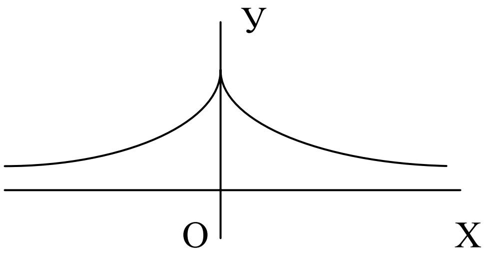


рис.1

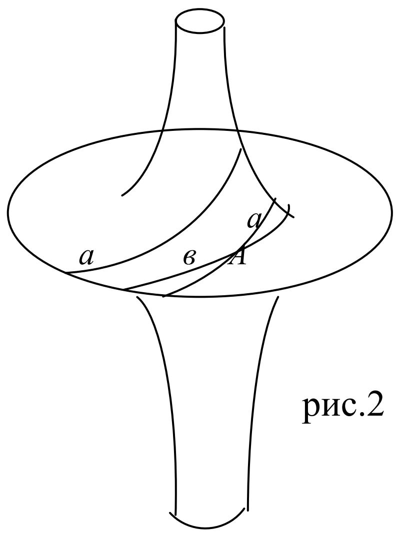


рис.2

Трактриса *– это кривая, длина касательной к которой постоянна (т.е. отрезок от точки касания до оси абсцисс есть константа). рис1*
Псевдосфера – поверхность вращения в виде двух сложенных

Прямой линией считаем гидезическую линию – т.е. линию кратчайшего расстояния между точками. Бельтрами показал, что на псевдосфере реализуется часть площади Лобачевского. Псевдосфера – поверхность постоянной отрицательной кривизны (т.е. гиперболическая форма), т.к. сумма углов треугольника на ней меньше 2d. Сфера – поверхность положительной постоянной кривизны (сумма углов треугольника больше 2d). Эллиптическое пространство – положительная кривизна. Евклидово пространство имеет нулевую кривизну.

Контрольные вопросы к разделу 2

1. Сформулируйте пятый постулат Евклида.
2. В чем состоит «проблема пятого постулата» и какое философское значение она имеет (априоризм математики Канта)?
3. В какой форме присутствует пятый постулат в современном школьном курсе геометрии?
4. Какая геометрия носит название абсолютной, а какая – евклидовой?
5. Раскройте недостатки «Начал» с современной точки зрения на аксиоматику.
6. Докажите теорему о внешнем угле треугольника в интерпретации Евклида. Почему в школьном курсе геометрии эта теорема формулируется по-другому?
7. Докажите, что аксиома параллельности является эквивалентом пятого постулата Евклида.
8. Перечислите другие эквиваленты пятого постулата Евклида.
9. Раскройте содержание и свойства системы аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства.
10. Перечислите системы аксиом Гильберта евклидова пространства и докажите некоторые следствия из них.
11. Дайте сравнительный анализ аксиоматик Вейля и Гильберта трехмерного евклидова пространства с современной точи зрения и с точки зрения возможного использования при построении школьного курса геометрии.
12. В чем состоят методические сложности использования аксиоматики Вейля при построении школьного курса геометрии?
13. Сформулируйте и докажите в схеме Гильберта основные теоремы, выражающие простейшие факты геометрии Лобачевского на плоскости.
14. В чем состоит идея доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского?
15. Перечислите известные модели геометрии Лобачевского и раскройте их смысл.
16. Какую связь имеет геометрия Лобачевского с геометрией реального пространства физического мира (теорией относительности)?
17. Какова геометрия Вселенной (евклидова, гиперболическая геометрия Лобачевского, эллиптическая геометрия Римана)?
18. Почему геометрия Лобачевского получила название гиперболической, а геометрия Римана – эллиптической?

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю. Геометрия. – М.: Наука, 1990. – 672 С.
2. Аксиоматический метод: БСЭ. 3-е изд. Т. I. –М.: ГНИ, 1970. – С. 345-346.
3. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. – М.: Наука, 1991. – 224 с.
4. «Начала Евклида»: Пер. с греч. Д.Д. Мордухая-Болтовского. Т.1-6. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 447 с.
5. «Начала Евклида»: Пер. с греч. Д.Д. Мордухая-Болтовского. Т.7-10. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 511 с.
6. «Начала Евклида»: Пер. с греч. Д.Д. Мордухая-Болтовского. Т.11-15. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 331 с.
7. Методика преподавания математики в средней школе. Частная методика /Сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 397 с.
8. Математический энциклопедический словарь. – М.: «Советская энциклопедия», 1988. – 847 с.
9. Архимедова две книге о шаре и цилиндре, измерение круга и леммы: Пер. с греч./леммы с лат./ Ф. Петрушевского. – Спб.: Тип. Деп. Нар. Просвещения, 1823. – 240с.
10. Энциклопедический словарь юного математика. – М.: Педагогика, 1989. – 350 с.
11. Атанасян Л.С., Мишин В.И. Об одном построении систематического курса геометрии в средней школе // Современные проблемы методики преподавания математики / Сост. Н.С. Антонов, В.А. Гусев. – М.: Просвещение, 1985. – С. 107-111.
12. Александров А.Д. О геометрии // Математика в школе. – 1980. №3. – С. 56-62.
13. Александров П.С. О некоторых направлениях в развитии математики и их значение для преподавания // На путях обновления школьного курса математики / Сост. А.И. Маркушевич, Г.Г. Маслова, Р.С. Черкасов. – М.: Просвещение, 1978. – С. 7-13.
14. Абрамов А.М. Аксиома подвижности и ее следствия // Преподавание геометрии в 6-8 классах / Сост. В.А. Гусев. – М.: Просвещение, 1979. – С. 247-278.
15. Абрамов А.М. Начальные понятия геометрии // Преподавание геометрии в 6-8 классах/ Сост. В.А. Гусев. – М.: Просвещение, 1979. – С. 227-246.
16. Абрамов А.М. Теоретические основы курса геометрии восьмилетней школы: Дис. … канд пед. наук. – М., 1975. – 123с.
17. Андронов И.К. Хроника // Математика в школе. – 1941. - №2.-С. 68-70.
18. Ахманов А.С. Логическое учение Аристотеля. – М.: Соцэкгиз, 1960. – 314с.
19. Александров А.Д. Общий взгляд на математику // Математика, ее содержание, методы и значение. Т.1/ Под.ред.А.Д.Александрова. – М.: Изд-во Акад. Наук СССР, 1956. – 295с.
20. Александров А.Д. Основания геометрии. – М.: Наука, 1987. – 288 с.
21. Аристотель. Аналитика первая и вторая: Пер.с.греч. – Л.: Госполитиздат, 1952. – 439 с.
22. Андреев Э.П. Пространство микромира. – М.: Наука, 1969.- 87с.
23. Билибин Н.И. Элементарная геометрия для гимназий и реальных училищ. – СПб, 1887. – 421 с.
24. Блюмберг Я. Учебник элементарной геометрии для средних учебных заведений. – СПб., 1989. – 172с.
25. Болтянский В.Г., Яглом И.М. Векторное обоснование геометрии // Новое в школьной математике/ Сост. И.М. Яглом. – М.: Знание, 1972. – С. 64-92.

26.Болтянский В.Г. Анализ – поиск решения задачи // Математика в школе. – 1974. - №1. – С. 34-40.
27.Бляшке В. Греческая и наглядная геометрия // Математическое просвещение / Под.ред. И.М. Яглома. – М.: Гостехиздат, 1957.- №2. – С. 111-130.
28.Барабашев А.Г. Диалектика развития математического знания. – М.: МГУ, 1983. – 167с.
29.Бахвалов С.В., Иваницкая В.П. Основания геометрии. Аксиоматическое изложение геометрии Евклида. – М.: Высшая школа, 1972. – 279с.
30.Бронштейн И.Н., Лопшиц А.М. «Не изгонять из школы идеи аксиоматического метода» // На путях обновления школьного курса математики/ Сост. А.М. Маркушевич, Г.Г. Маслова, Р.С. Черкасов. – М.: Просвещение, 1978. –С.26-27.
31.Болтянский В.Г. Элементарная геометрия. Книга для учителя. – М.: Просвещение, 1985. – 318с.
32.Бонди Г. Относительность и здравый смысл. – М.: Мир, 1967. – 163с.
33.Блохинцев Д.Н. Пространство и время в микромире. – М.: Наука, 1970.- 359с.
34.Бом Д. Специальная теория относительности. – М.: Мир, 1967. – 285с.
35.Вулих З.Б. Краткий курс геометрии и собрание геометрических задач. – СПб., 1875. – 202с.
36.Ващенко-Захарченко М.Е. «Начала» Евклида. Предисловие. – Киев, 1880. – 728с.
37.Выготский М.Я. «Начала Евклида» : Пер.с греч. – М.: Гостехиздат, 1948. – 448с.
38.Владимиров В.С., Понтрягин Л.С., Тихонов А.Н. О школьном математическом образовании // Математика в школе. – 1979. - №3. – С.12-14.
39.Ван дер Варден Б.Л. Пробуждающаяся наука. – М.: Госиздат, 1959. – 459с.
40.Вернер А.Л., Франгулов С.А., Юзвинский С.А. Аксиоматическое построение геометрии /по Колмогорову А.Н./ Учебное пособие. – Л.-1978.-48с.
41.Гурьев С.Е. Основания геометрии. – СПб,: Петербург, 1804. – 503с.
42.Гольтиков В.Ф. Развитие методики преподавания математики. Из истории русского учебника геометрии для средней школы. – Челябинск, 1966. – 58с.
43.Гурьев С.Е. Основания геометрии. – СПб., 1811. – 674с.
44.Гурьев С.А. Наука исчисления, книга первая, содержащая основания арифметики. – СПб., 1805. – 672с.
45.Гильберт Д. Основания геометрии /Под.ред. и вступит. статьей П.К.Рашевского. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 491с.
46.Гольтиклв В.Ф. Русский учебник геометрии средней школы: Автореф.дис. … канд.пед. наук. – М., 1967. – 14с.
47.Груденов Я.И. Изучение определений, аксиом, теорем. – М.: Просвещение, 1981. – 95с.
48.Гнеденко Б.В. Математика – наука древняя и молодая // Архитектура математики / Бурбаки, Никола. – М.: «Знание», 1972. – С.19-31.
49.Гельмгольц Г. О происхождении и значении геометрических аксиом. – СПб., 1895. – 58с.
50.Давидов А.Ю. Элементарная геометрия в объеме гимназического курса. – М.: МГУ, 1964. – 299с.
51.Дьедонне Ж. Надо ли учить современной математике? // Математика в школе. – 1976. - №6. – С.88-91.
52.Делоне Б.Н. Элементарное доказательство непротиворечивости планиметрии Лобачевского. – М.: Техтеоритлит, 1956. – 139с.
53.Донеддю А. Евклидова планиметрия: Пер.с франц. А.М. Абрамова / Под.ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Наука, 1978. – 272с.

54.Ефимов Н.Б. Высшая геометрия. – М.: Наука, 1978. – 576с.
55.Егоров И.П. Об аксиоматическом построении евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского // Математика в школе. – М.: Просвещение, 1970. - №5. – С.14-24.
56.Захарова А.Е. Система упражнений, направленных на формирование первых представлений об аксиоматическом методе: дис. … канд.пед.наук. – М., 1978. – 178с.
57.Извольский Н. Геометрия на плоскости. – М.: «Сотрудник школ» А.К.Зальской, 1911. – 266с.
58.Извольский Н. Геометрия в пространстве. – М.: «Сотрудник школ» А.К. Зальской, 1910. – 127с.
59.Ильинский А.Н. Основания геометрии, составленные по системе академика Гурьева.- СПб., 1825. – 261с.
60.Ильин А.С. Философское значение геометрии Лобачевского // Математика в школе. – М., 1957. - №3. – С.1-4.
61.Колмогоров А.Н. Новое в школьной математике // На путях обновления школьного курса математики/ Сост. А.И. Маркушевич, Г.Г.Маслова, Р.С. Черкасов. – М.: Просвещение, 1978. – С.72-79.
62.Колмогоров А.Н. К новым программам по математике // На путях обновления школьного курса математики/ Сост. А.И. Маркушевич, Г.Г.Маслова, Р.С. Черкасов. – М.: Просвещение, 1978. – С.69-72.
63.Колмогоров А.Н., Яглом И.М. О содержании школьного курса математики // Математика в школе. – 1965. - №4. – С.53-62.
64.Колягин Ю.М., Луканкин Г.Л. Основные понятия школьного курса математики. – М.: Просвещение, 1974. – 382с.
65.Каган В.Ф. Основания геометрии. Т.1. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – С.21-27.
66.Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. II. – М.-Л.: Наука, 1987. – 319с.
67.Крылов А.Н. Воспоминания и очерки. – М.: АН СССР, 1956. – С.579-589.
68.Каган В.Ф. Лобачевский и его геометрия. – М.: Технико-теоретическая литература, 1955. – 303с.
69.Киселев А.П. Элементарная геометрия для средних учебных заведений. – М.: 1892. – 302с.
70.Каган В.Ф. Очерки по геометрии. – М.: МГУ, 1963. – 571с.
71.Колмогоров А.Н. Об учебном пособии «Геометрия 6-10» А.В.Погорелова //Математика в школе. – 1983. - №2. – С.42-46.
72.Колмогоров А.Н. О системе основных понятий и обозначений для школьного курса математики // Математика в школе. – 1971. - №2. – С.17-22.
73.Колмогоров А.Н. Новое в школьной математике // На путях обновления школьного курса математики /Сост. А.И. Маркушевич, Г.Г. Маслова, Р.С.Черкасов. – М.:Просвещение, 1978. – С.72-79.
74.Канторович Л.В., Соболев С.Л. Математика в современной школе // Математика в школе. – 1979. - №4. – С.6-11.
75.Колмогоров А.Н. Об учебниках на 1966-67 учебный год //Математика в школе. – 1966. - №3. – С.26-30.
76.Каджоян Т.А. Формирование понятия об аксиоматическом методе на уроках алгебры средней школы: Дис….канд.пед.наук. – М., 1977. – 149с.
77.Курганов В. Введение в теорию относительности: Пер.с франц. В.Д.Захарова /Под ред. Н.В.Мицкевича. – М.:Мир, 1968. – 180с.
78.Лежандр Г. Начальные сведения геометрии. – Спб., 1819. – 294с.

79.Леонардо да Винчи. Избранные естественнонаучные произведения. – М.: АН СССР, 1955. – 1207с.
80.Лаптев Б.Л. Теория параллельных линий в ранних работах Н.И.Лобачевского // Сто двадцать пять лет неевклидовой геометрии Лобачевского. 1826-1951 /Под.ред. А.П.Нордена. – М.-Л.: Гостехиздат, 1952. – С.99-116.
81.Ливанова А.М. Три судьбы. – М.: Знание, 1975. – 224с.
82.Ланшоц К. Альберт Эйнштейн и строение космоса: Пер.с англ. В.А.Умарова. – М.: Наука, 1967. – 159с.
83.Медяник А.И. Учителю о школьном курсе геометрии. – М.: Просвещение, 1984.- 96с.
84.Маргулис А.Я. Русские педагоги-математики. Андрей Петрович Киселев //Математика в школе. – 1948. - №4. – С.45-46.
85.Молодший В.Н. Аксиоматический метод //Вопросы преподавания математики в средней школе /Под.ред. П.В.Стратилатова. – М.: Учпедгиз, 1961. – 288с.
86.Мищенко А.С., Понтрягин Л.С. О некоторых принципах преподавания математики в школе //Математика в школе. – 1982. - №2. – С.50-52.
87.Мартиросян П.В. Элементы неевклидовой геометрии в средней школе: Дис….канд.пед.наук. – Баку, 1973. – 181с.
88.Назаров М.Н. Развитие логического мышления учащихся в процессе преподавания геометрии в старших классах средней школы: Автореф.дис….канд.пед.наук. Алма-Ата, 1970. – 19с.
89.Никитин Н.Н. Геометрия. Учебник для 6-8 классов. – М.: Просвещение, 1970. – 208с.
90.Никольская И.Л. Логическая грамотность и школьные учебники математики //Математика в школе. – 1969. - №5. – С.29-31.
91.Неванлинна Р. Пространство, время, относительность: Пер.с нем. Г.А. Вольперта /Под.ред. И.М. Яглома. – М.: Мир, 1966. – 230с.
92.Попов Г.Н. Псаммит Архимеда /Исчисление песчинок. – Петроград, 1923. – 96с.
93.Погорелов А.В. Геометрия. Учебное пособие для 6-10 классов средней школы. – М.: Просвещение, 1983. – 288с.
94.Погорелов А.В. Элементарная геометрия. – М.: Наука, 1977. – 279с.
95.Погорелов А.В. Геометрия. – М.: Наука, 1983. – 288с.
96.Погорелов А.В. Геометрия. Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1979. –175с.
97.Перевощиков Д.М. Основания геометрии. – М., 1826. – 243с.
98.Понтрягин Л.С. Оптимизация и дифференциальные игры // Успехи математических наук, 1978. – Вып.33. - №6. – С. 22-28.
99.Пойа Д. Как решать задачу? – М.: Учпедгиз, 1961. – 207с.
100. Понтрягин Л.С. О математике и качестве ее преподавания // Коммунист. – 1980. - №4.- С. 99-110.
101. Польский Н.И. О различных геометриях. Изд-е второе доп. и перераб. – Киев: Академия наук Украинской ССР, 1962. – 100с.
102. Рашевский К.Н. Элементарная геометрия и методы решения задач на построение. Курс средних учебных заведений. – М., 1918. – 288с.
103. Рогановский Н.М., Столяр А.А. Основы современной школьной математики, ч.2. – Минск: Народная асвета, 1972. – 271с.
104. Рыбников К.А. История математики. – М.: МГУ, 1974. – 455с.
105. Райковский С.И. Начальные основания геометрии. – СПб., 1827. – 271с.
106. Роберт С., Столл. Множества. Логика. Аксиоматические теории. – М.: Просвещение, 1968. – 231с.

107. Рогановский Н.М. Аксиоматическое построение школьного курса стереометрии с привлечением идей геометрических преобразований: Автореф.дис….канд.пед.наук. – М., 1969. – 14с.
108. Рыжик В.И. Использование аксиоматики евклидова пространства для изучения геометрии в школе: Автореф.дис….канд.пед.наук. –Л., 1975. – 21с.
109. Розенфельд Б.А. Геометрия Лобачевского и теория относительности // Математика в школе. – М., 1965. - №2. – С.10-20.
110. Силин А.В., Шмакова Н.А. Открываем неевклидову геометрию. – М.: Просвещение, 1988. – 125с.
111. Семенов Е.Е. Понятие об аксиоматическом методе в геометрии и неевклидовых геометриях. – Свердловск, 1973. – 73с.
112. Смородинский Я.А., Сурков Е.Л. Геометрия Лобачевского и теория относительности. – М.:Знание, 1971. – 48с.
113. Смородинский А.Я. Геометрия Вселенной. – М.: Знание, 1963. – 48с.
114. Соколовский Ю.И. Начала теории относительности с графическими доказательствами. – М.: Просвещение, 1970. – 159с.
115. Смородинский Я.А. Лобачевский и физика //Квант. – М.:Наука, 1976. - №2. – С.22-27.
116. Соколовский Ю.И. Уроки теории относительности в школе. – Новосибирск: НГУ, 1965. – 18с.
117. Терешин Н.А. Мировоззренческая направленность курса методики преподавания математики. – М.: Изд-во «Прометей» МГПИ им. В.И.Ленина, 1989. –106с.
118. Фирсов В.В. Пути повышения эффективности преподавания математики в современных условиях // Математика в школе. – 1982. - №5. – С. 8-10.
119. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача: В 2 ч. – М.: Просвещение, 1983. Ч.2. – 191с.
120. Цейтен Г.Г. История математики в древности и в средние века. –М.-Л., 1938. – 232с.
121. Четверухин Н.Ф. О научных принципах преподавания геометрии в советской школе // Известия академии педагогических наук РСФСР, 1951. – Вып. 31. - №2. – С.12-23.
122. Шевченко В.Е. Опыт изучения оснований геометрии /аксиоматического метода, общих вопросов аксиоматики и геометрии Лобачевского/ в средней школе: Дис. …канд.пед.наук. – Киев, 1969. – 372с.
123. Юшкевич А.П. Математика и ее преподавание в России XVII-XIX вв.// Математика в школе. – 1947. - №1. – С.26-39.
124. Яглом И.М. О школьном курсе геометрии // Математика в школе. – 1963. - №2. – С.53-58.
125. Яглом И.М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. – М.: Наука, 1969. – 303с.

Подаева Наталия Георгиевна, Жук Денис Анатольевич

Лекции по основаниям геометрии

Учебно-методическое пособие для студентов физико-математического факультета

Формат $60x84_{1/16}$

Подписано в печать

Уч.-изд.. л. 8,8

Усл.-печ. л. 8,6

Тираж 1000 экз. Цена договорная

Бумага тип 3
Заказ

Типография Елецкого государственного педагогического института: 399740, Елец, ул. Ленина, 91.