МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ИНГУШСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
_______ З.О.Батыгов
____ 05 ______ 2018 г.

Методическое пособие

по математическому анализу для студентов 1 курса

физико-математических специальностей.

Напрвление подготовки 01.03.01 – Математика

Программа *академический бакалавриат*

Квалификация *бакалавр*

Форма обучения *очная*

Факультет *физико-математический*

Кафедра *Математический анализ*

Магас 2018

УДК 517

Составители: А.Х. Мархиева, Е.В. Оздоева, М.М. Албогачиева.

Методическое пособие по математическому анализу для студентов 1 курса физико-математических специальностей.

Данное методическое пособие является руководством при выполнении контрольных заданий по математическому анализу студентами 1 курса физико-математических специальностей.

Методическое пособие рассмотрено на заседании УМС ИнгГУ
от 28.03.2018 протокол № 7

Рецензенты: Султыгов М.Д., профессор, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математический анализ» ИнгГУ

Вазиева Л.Т., доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Математика» СКГМИ (ГТУ)

Содержание

Контрольная работа №1

(Дифференциальное исчисление функции одной переменной).

Задание № 1. Методом математической индукции доказать:

1. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n\in N.$
2. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2, n\in N.$
3. $1\ +3\ +3^2+\ldots+3^{n-1}=\dfrac{3^n-1}{2}, n\in N.$
4. $1\ +4\ +4^2+\ldots+4^{n-1}=\dfrac{4^n-1}{3}, n\in N.$
5. $1\cdot 2+2\cdot 5+3\cdot 8+\ldots+n(3n-1)=n^2(n+1), n\in N.$
6. $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+3\cdot 4^2+\ldots+n(n+1)^2=\dfrac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}, n\in N.$
7. $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}, n\in N.$
8. $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\left(1-\dfrac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=\dfrac{n+2}{2n+2}, n\in N.$
9. $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\ldots\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}, n\in N.$
10. $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{14}, n\geq 2, n\in N.$

Задание № 2. Решить уравнения и неравенства:

1. $\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-12x+36}=-8.$
2. $|x(1-x)|<0{,}05.$
3. $\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-12x+36}=16.$
4. $|x|>|x+1|.$
5. $|2x-1|<|x-1|.$
6. $|x+2|-|x|>1.$
7. $|x+2|-|x-2|<2.$
8. $\sqrt{x^2+16x+64}-\sqrt{x^2+2x+1}=-7.$
9. $|2x-3|<|x+1|.$
10. $|x|-2|x+1|+|x-2|=4.$

Задание № 3. Найти область определения функции:

1. $y=\sqrt{9-x^2}+\lg\dfrac{x+1}{x-2}.$

2. $y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2+6x+9)+\sqrt{x^2-2x-8}.$

3. $y=\lg(4\sin^2 x-3).$

4. $y=\arccos\dfrac{2}{x^2+3}.$

5. $y=\sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}.$

6. $y=\lg\sin(x-3)+\sqrt{16-x^2}.$

7. $y=\arcsin\dfrac{x-3}{2}-\lg(4-x).$

8. $y=\arccos\dfrac{2}{2+\sin x}.$

9. $y=\lg(1-\lg(x^2-5x+16)).$

10. $y=\lg(1-2\cos x).$

Задание № 4. Вычислить пределы:

№1.

$a)\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n(n-1)})$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^6-x^2+x}{x^6+5}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-x-6}{2x^2+x-10}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)(\ln(2x-3)-\ln(2x+1))$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\mathrm{arctg}3x}$.

№2.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{8}{15}+\dfrac{34}{225}+\ldots+\dfrac{3^n+5^n}{15^n}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x+1}{3-2x^3}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{\sqrt{x+1}-2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(x\mathrm{tg}3x\mathrm{ctg}^2 5x)$; е) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{2x}{x-3}}$.

№3.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\ldots+(2n-1)-2n}{\sqrt[5]{n^5-2n+5}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-5}{2x-1-6x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5+x}-\sqrt{5-x}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\mathrm{cosec}3x}$.

№4.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\sqrt{n}-1}{2+7+12+\ldots+(3n-3)}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+9x+4}{x^2+9x+20}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\mathrm{tg}x}\right)$; е) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\mathrm{cosec}3x}$.

№5.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+1)!-n!}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-12}{x^2-2x-8}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2x\operatorname{tg}x-\dfrac{\pi}{\cos x}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{3+x^2}-\sqrt[3]{3+x}}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{5x+5}-5}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}(2-3x)(\ln(1-3x)-\ln(2-3x))$.

№6.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[6]{x^6-2}}{x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2-6}+2}{x^3+8}$; д) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$; е) $\lim\limits_{x\to -1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

№7.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\ldots n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{2x^3+10}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{3}}((x+1)^{\frac{2}{3}}-(x-1))^{\frac{2}{3}}$; д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$; е) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

№8.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{20}\cdot(3x+1)^{10}}{(6x-2)^{30}}$; в) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^3-4x+3}$; д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\operatorname{tg}^3x-3\operatorname{tg}x}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

№9.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5+10+15+\ldots+5n}{2n^2+9}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6-8x+x^5}{1-3x^5}$; в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+10x+21}{x^2+8x+15}$;

г) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$.

№10.

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+2)!-(n+1)!}{(n+3)!}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{2x^2+13x+20}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{2x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}+\sqrt[5]{32x^5+1}}{1-3x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{\operatorname{tg}8x}$; е) $\lim\limits_{x\to\infty}(2-3x)(\ln(1-3x)-\ln(2-3x))$.

Задание № 5. Исследовать функцию на непрерывность. Указать род точек разрыва. Для точек разрыва первого рода найти скачок функции. Сделать чертеж:

1. а) $y=5^{\frac{1}{x-3}}$; б) $y=\begin{cases} -x, \text{ если } x\le 0, \\ x^3, \text{ если } 0<x\le 2, \\ x+4, \text{ если } x>2. \end{cases}$

2. а) $y=2^{2-x}$; б) $y=\begin{cases} 2, \text{ если } x<-1, \\ 1-x, \text{ если } -1\le x\le 1, \\ \ln x, \text{ если } x>1. \end{cases}$

3. а) $y=3^{\frac{x}{x^2-2x-3}}$; б) $y=\begin{cases} 1, \text{ если } x\le 0, \\ 2^x, \text{ если } 0<x\le 2, \\ x+2, \text{ если } x>2. \end{cases}$

4. а) $y=4^{\frac{1}{3-x}}$; б) $y=\begin{cases} x+4, \text{ если } x<-1, \\ x^2+2, \text{если } -1\le x\le 1, \\ 2x, \text{если } x>1. \end{cases}$

5. а) $y=2^{\frac{x}{x-2}}$; б) $y=\begin{cases} x^2+1, \text{ если } x\le 1, \\ \dfrac{2}{x}, \text{ если } 1<x\le 2, \\ x-1, \text{ если } x>2. \end{cases}$

6. а) $y=5^{\frac{x}{x^2+2x-3}}$; б) $y=\begin{cases} x, \text{ если } x\le -2, \\ \dfrac{5}{x+2}, \text{ если } -2<x\le 3, \\ -1, \text{ если } x>3. \end{cases}$

7. $y=3^{\frac{x}{2-x}}$; б) $y=\begin{cases} x+1, \text{ если } x\le 0, \\ (x+1)^2, \text{если } 0<x\le 2, \\ 4-x, \text{если } x>2. \end{cases}$

8. а) $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2-x}}$; б) $y=\begin{cases} x+2, \text{ если } x\le 0, \\ \dfrac{3}{x}, \text{ если } 0<x\le 3, \\ 3, \text{ если } x>3 \end{cases}$

9. а) $y=9^{\frac{1}{3-x}}$; б) $y=\begin{cases} -x, \text{ если } x\le 0, \\ -(x-1)^2, \text{если } 0<x<2, \\ x-3, \text{если } x\ge 2. \end{cases}$

10. а) $y=\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{1}{x-4}}$; б) $y=\begin{cases} x+2, \text{ если } x\le -1, \\ x^2+1, \text{если } -1<x\le 1, \\ 3-x, \text{если } x>1. \end{cases}$

Задание № 6. Найти производную функций:

1. а) $y=\left(\dfrac{2}{27x}-\dfrac{1}{9x^2}\right)\sqrt{3x+x^2}$; б) $y=3^{\operatorname{arctg}^2(4x+1)}$; в) $y=(\operatorname{tg}2x)^x$; г) $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{9}=1$; д) $\begin{cases} x=7t^3-4, \\ y=4t^7. \end{cases}$

2. а) $y = x\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$; б) $y = \operatorname{tg}^3 6x - e^{\frac{1}{x}}3x$; в) $y = (\sin 3x)^{\cos x}$; г) $\sin y = 2xy^3 + 5$; д) $\begin{cases} x = \ln^2 t, \\ y = t + 4\ln t. \end{cases}$

3. а) $y = x\arcsin\frac{2x+1}{3}$; б) $y = e^{\cos^4 6x}$; в) $y = (\operatorname{arctg} 2x)^{\sin 6x}$; г) $4x + \cos y = 23y$; д) $\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = e^{10t}. \end{cases}$

4. а) $y = \sqrt[3]{\frac{x+3}{3x-5}}$; б) $y = (1+\operatorname{ctg}^2 3x)e^{-x}$; в) $y = \left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^x$; г) $y^2 + x^2 = 3\sin y$, д) $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1}, \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2. \end{cases}$

5. а) $y = \frac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}$; б) $y = e^{\operatorname{arctg}\sqrt{1+\ln(2x+5)}}$; в) $y = \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^{x\arcsin x}$; г) $y^2 = x + \ln\frac{x}{y}$; д) $\begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \cos^2 t. \end{cases}$

6. а) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-3x}{1+3x}}$; б) $y = e^x \cos x \cdot \sin^2 3x$; в) $y = (\operatorname{tg} 2x)^{\cos\frac{x}{2}}$; г) $x^3 - y^3 = 7$; д) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2). \end{cases}$

7. а) $y = \ln\left(5x^7 - 4\sqrt{x}\right)$; б) $y = e^{\operatorname{arcctg}\sqrt{2+\ln(x+1)}}$; в) $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$; г) $y = e^y + 42x$; д) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

8. а) $y = \left(1 + \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\right)^4$; б) $y = \frac{1 + x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$; в) $y = x^{\ln x}$; г) $x^4 + x^3y^3 + y^2 = 5$; д) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$

9. а) $y = \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)e^{\operatorname{arctg}^2 x}$; б) $y = (\arccos 3x)^{2x}$; в) $y = \sqrt[3]{(1 + \ln^4 3x)^2}$; г) $4\sin^4(x+y) = x$; д) $\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \ln t. \end{cases}$

10. а) $y = x\operatorname{arctg}^3 5x + \ln\operatorname{tg} x$; б) $y = \left(\frac{x}{2+x}\right)^x$; в) $y = \sqrt[5]{x + x\sqrt[3]{x}}$; г) $\operatorname{tg} y = 5y - 7x$; д) $\begin{cases} x = t^4 + 5\sqrt{t}, \\ y = \ln(1-t^2). \end{cases}$

Задание № 7. Вычислить приближенные значения выражений, заменяя приращение функции дифференциалом:

1. а) $\sqrt[3]{65}$; б) $\sin 31^0$.
2. а) $\sqrt[4]{90}$; б) $\arcsin 0{,}95$.
3. а) $\sqrt[3]{125{,}134}$; б) $\ln\operatorname{tg} 47^0$.
4. а) $\sqrt[4]{15{,}6}$; б) $\arcsin 0{,}51$.
5. а) $\sqrt[5]{31}$; б) $\operatorname{tg} 44^0$.
6. а) $\sqrt{\frac{2-0{,}15}{2+0{,}15}}$; б) $\ln\operatorname{tg} 44^0$.
7. а) $\sqrt{15}$; б) $\operatorname{arctg} 1{,}05$.
8. а) $\sqrt{27}$; б) $\operatorname{arcctg} 0{,}97$.
9. а) $\sqrt{\frac{3+0{,}3}{3-0{,}3}}$; б) $\arccos 0{,}49$.
10. а) $\sqrt[5]{33}$; б) $\sin 359^0$.

Задание № 8. Найти производные указанного порядка:

1. $y=\sin^2 3x\ln x,\ y^{(3)}=?$
2. $y=x^3e^{3x},\ y^{(3)}=?$
3. $y=\dfrac{e^{2x}}{x},\ y^{(3)}=?$
4. $y=\sin\alpha nx\cos\beta x,\ y^{(2)}=?$
5. $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}},\ y^{(2)}=?$
6. $y=\dfrac{\ln x}{x},\ y^{(4)}=?$
7. $y=x^2\cos 10x,\ y^{(3)}=?$
8. $y=\sin^4 2x, y^{(3)}=?$
9. а) $y=\sqrt{x+5},\ y^{(3)}=?$
10. а) $y=\cos^3 x, y^{(2)}=?$

Задание № 9. Вычислить пределы, пользуясь правилом Лопиталя:

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{ctg}x-1}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\operatorname{arctg}x\right)^x$.
2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.
3. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2 x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^x$.
4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin^2 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.
5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 5x}{\ln\cos 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax)^{\frac{1}{\sin^2 bx}}$.
6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to a}\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$.
7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.
8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x-e^{-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{\sin 2x}$.
9. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}$.
10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2\ln x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

Задание № 10. Разложить по формуле Маклорена до 0 (x^n):

1. а) $y=\ln(1+e^x)$; б) $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.
2. а) $y=(x-1)e^{-2x}$; б) $y=\dfrac{3x-1}{x^2+x-6}$.
3. а) $y=(x+2)e^{\frac{x}{2}}$; б) $y=\dfrac{2x+5}{x^2+4x-5}$.
4. а) $y=\cos(2x+1)$; б) $y=\dfrac{x^2+4x-1}{x^2+2x-3}$.
5. а) $y=e^{6x-2}$; б) $y=\ln\dfrac{1+3x}{1-3x}$.
6. а) $y=\ln(3+2x-x^2)$; б) $y=\dfrac{x^2+1}{2x-3}$.
7. а) $y=\ln(3+2x-x^2)$; б) $y=\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$.
8. а) $y=(3x+1)\sqrt{1-x}$; б) $y=\dfrac{1-2x^2}{2+x-x^2}$.
9. а) $y=\sin(5x-3)$; б) $y=\dfrac{x+4}{x^2-5x+6}$.
10. а) $y=(1+x^3)\ln\sqrt{1+x}$; б) $y=\dfrac{x^2+3e^x}{e^{2x}}$.

Задание № 11. Исследовать функцию и построить ее график:

1. а) $y=\dfrac{x}{1-x^2}$.
2. а) $y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$.
3. а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+4}$.
4. а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^4}$.
5. а) $y=\dfrac{1}{x(x^2-4)}$.
6. а) $y=\dfrac{x}{x^2-3x-4}$.
7. а) $y=\dfrac{x^2}{x^3-8}$.
8. а) $y=\dfrac{(x-2)^2}{(x+2)^3}$.
9. а) $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$.
10. а) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Метод математической индукции

Метод математической индукции применяется для доказательства утверждений, зависящих от натурального числа n.

Метод математической индукции формулируется в общем виде следующим образом: чтобы доказать некоторое утверждение, зависящее от натурального числа n надо:

1) **проверить его справедливость при** $n=1$ (если при $n=1$ утверждение не имеет смысла, то проверку справедливости утверждения надо делать для наименьшего значения n, при котором утверждение имеет смысл).
2) **предполагая справедливость утверждения для некоторого** $n=k$ $(k>1)$**,** доказать его справедливость для $n=k+1$.

Затем делается вывод о справедливости данного утверждения для любого натурального числа n.

Пример.

а) Доказать методом математической индукции, что

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1) проверяем верность данной формулы для $n=1$:

- левая часть: $1^2=1$

- правая часть: $\frac{1(1+1)(2+1)}{6}=\frac{2\cdot 3}{6}=1$.

Левая часть равна правой части при $n=1$.

2) Предполагаем, что данная формула верна для некоторого $n=k$, $k>1$, т.е.

$1^2+2^2+3^2+...+k^2=\frac{\kappa(\kappa+1)(2\kappa+1)}{6}$.

Докажем, что для $n=k+1$ эта формула верна:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+(k+1)^2=\frac{(\kappa+1)((\kappa+1)+1)(2(\kappa+1)+1)}{6}$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{\kappa(\kappa+1)(2\kappa+1)}{6}+(\kappa+1)^2=\frac{(\kappa+1)[\kappa(2\kappa+1)+6(\kappa+1)]}{6}=$$

$=\frac{(\kappa+1)(2\kappa^2+7\kappa+6)}{6}==\frac{(\kappa+1)(\kappa+2)(2\kappa+3)}{6}=\frac{(\kappa+1)((\kappa+1)+1)(2(\kappa+1)+1)}{6}$. Что и требовалось доказать.

б) Методом математической индукции доказать, что $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

1) $n=1,\ 1=1^2$ верно;

2) для $n=k$ предполагаем верным, т.е. $1+3+5\ldots+(2k-1)=k^2$

Докажем для $n=k+1$:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2(k+1)-1)=(k+1)^2,$$

т.к. $1+3+5+\ldots+(2k-1)$ есть k^2, последнее выражение примет вид:

$$k^2+(2(k+1)-1)=(k+1)^2$$

Левая часть: $k^2+(2(k+1)-1)=k^2+2k+1$.

Правая часть: $(k+1)^2=k^2+2k+1$

Отсюда следует, что левая часть равна правой части. Что и требовалось доказать.

в) Доказать методом математической индукции неравенство Бернулли:

$$(1+x)^n\geq 1+nx, \text{ при } x>-1, n\in N.$$

1) $n=1, (1+x)^1\geq 1+1\cdot x$ - верно.

2) $n=2, (1+x)^2\geq 1+2x$, $x^2+2x+1\geq 1+2x$ - верно.

3) пусть для $n=k$ верно, т.е. $(1+x)^k\geq 1+kx$

4) докажем для $n=k+1$:

$(1+x)^{k+1}\geq 1+(k+1)x$, $(1+x)^k(1+x)\geq 1+(k+1)x$; т.к. $(1+x)^k\geq 1+kx$, то $(1+kx)(1+x)\geq 1+(k+1)x$

$\Leftrightarrow 1+kx+x+kx^2\geq 1+(k+1)x$,

$kx^2+(k+1)x+1\geq 1+(k+1)x$, а это действительно верно для всех k.

г) Методом математической индукции доказать: $1+3+3^2+\ldots+3^{n-1}=\frac{3^n-1}{2}$**.**

1) проверим для $n=1$, $1=\frac{3^1-1}{2} \Leftrightarrow 1=\frac{2}{2} \Leftrightarrow 1=1$ - верно.

2) проверим для $n=2$, $1+3=\frac{3^2-1}{2} \Leftrightarrow 4=\frac{8}{2} \Leftrightarrow 4=4$ - верно.

3) предположим, что верно для $n=k$, т.е.

$1+3+3^2+\ldots+3^{k-1}=\frac{3^\kappa-1}{2}$ (1),

и докажем для $n=k+1$:

$1+3+3^2+\ldots 3^{k-1}+3^{(k+1)-1}=\frac{3^{k+1}-1}{2} \Leftrightarrow 1+3+3^2+\ldots+3^{k-1}+3^k=\frac{3^{\kappa+1}-1}{2}$,

т.к. $1+3+3^2+\ldots+3^{k-1}$ есть $\frac{3^k-1}{2}$, то $\frac{3^k-1}{2}+3^k=\frac{3^{\kappa+1}-1}{2}$,

т.е. $\frac{3^k-1}{2}+3^k=\frac{3^k-1+2\cdot 3^k}{2}=\frac{3^k+2\cdot 3^k-1}{2}=\frac{3^k\cdot(1+2)-1}{2}=\frac{3^k\cdot 3-1}{2}=\frac{3^{k+1}-1}{2}$

Левая часть равна правой части. Что и требовалось доказать.

2. Некоторые сведения о действительных числах.

Абсолютная величина числа a (обозначается символом $|a|$) определяется следующим образом:

$$|a|=\begin{cases} a, & \textit{если } a>0, \\ 0, & \text{если } a=0, \\ -a, & \textit{если } a<0. \end{cases}$$

Абсолютную величину числа a называют также его ***модулем.***

Это определение позволяет вычислить абсолютную величину любого действительного числа. При этом надо пользоваться или первой, или второй, или третьей строкой определения в зависимости от того, является ли данное конкретное число положительным, нулем или отрицательным.

Например, на вопрос: *чему равна абсолютная величина числа* -3, полный ответ дается так: $-3<0$; поэтому согласно третьей строке определения абсолютная величина числа -3 равна $-(-3)=3$, т.е. $|-3|=3$.

Заметив, что при $a = 0$ справедливо равенство $|a| = a$, можно записать определение абсолютной величины короче:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Из определения модуля вытекает следствие:

$|a| \geq 0$ при любом a.

Для доказательства рассмотрим два случая:

1^0. $a \geq 0$. Тогда $|a| = a \geq 0$, что и требовалось доказать.

2^0. $a < 0$. Тогда $|a| = -a$. Но $-a > 0$, т.к. $-a < 0$, т.е. $|a| > 0$, что и требовалось доказать.

Следует хорошо понять: то, что выражение $|a|$ всегда положительно или нуль, является *не определением абсолютной величины, а следствие его*; в определении о знаке выражения $|a|$ ничего не сказано.

Легко видеть, что геометрически $|a|$ означает расстояние, т.е. длину отрезка числовой оси (положительное число или 0) от точки a до нуля.

Эти геометрические представления очень полезны при решении задач, а в простейших случаях позволяют дать ответ сразу, не прибегая к стандартному методу.

Например, уравнение $|x - 1| = 2$ геометрически решается так: его решение – это точки, находящиеся на расстоянии 2 от точки 1, т.е. $x_1 = 3,\ x_2 = -1$.

Аналогично, решение неравенства $|x + 2| \leq 5$ - это точки, находящиеся от точки -2 на расстоянии не больше 5, т.е. точки интервала $-7 \leq x \leq 3$.

Отметим, что

$a \leq |a|$ *при любом* a.

Очень полезны для решения задач следующие свойства модуля: *для любых действительных чисел* a *и* b.

I. $|a + b| \leq |a| + |b|$.

II. $|a - b| \geq |a| - |b|$.

III. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

$$\text{IV. } \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\ (b \neq 0).$$

Перейдем к рассмотрению примеров.

1. Решить уравнение $\left|x^2 - x - 6\right| = x + 2$**.**

Рассмотрим последовательно два случая:

а) $x^2 - x - 6 < 0$. В этом случае имеем уравнение $-x^2 + x + 6 = x + 2$, корни которого $x_1 = 2,\ x_2 = -2$. Теперь нужно еще проверить, удовлетворяют ли x_1 и x_2 условию а).

Для этого достаточно подставить эти значения в левую часть неравенства $x^2 - x - 6 < 0$. После подстановки получаем числовые неравенства $-4 < 0$ и $0 < 0$.

Первое из них справедливо, а второе – нет.

Поэтому лишь $x = 2$ является корнем исходного уравнения;

б) $x^2 - x - 6 \geq 0$. В этом случае имеем уравнение $x^2 - x - 6 = x + 2$, корни которого $x_1 = 4, x_2 = -2$, так оба эти значения x удовлетворяют условию б), то и 4, и -2 являются корнями исходного уравнения.

Итак, исходное уравнение имеет три корня: $-2,\ 2$ и 4.

При внимательном разборе этого решения возникает иногда следующий вопрос: мы сначала отбросили значения $x = -2$, а потом снова его нашли, так что, в конце концов, это значение оказалось корнем исходного уравнения; как это понять? Дело заключается в следующем: в первом случае, отбрасывая значение $x = -2$, мы вовсе не утверждали, что оно не является корнем исходного уравнения. Мы утверждали только, что значение не подходит под ограничения, наложенные на x в условии случая а).

Естественно, ничто не мешает этому же значению удовлетворять условию иного случая и оказаться корнем исходного уравнения.

2.Решить неравенство $\left|x^2 + 3x\right| + x^2 - 2 \geq 0$**.**

Решение. Согласно определению модуля мы должны рассмотреть два случая:

а) $x^2 + 3x \geq 0$, б) $x^2 + 3x < 0$.

В случае а) получаем неравенство $2x^2 + 3x - 2 \geq 0$, решение которого: $x \leq -2$ и $x \geq \frac{1}{2}$.

Условие а) удовлетворяется при $x \leq -3$ и при $x \geq 0$.

Из указанных выше решений надо отобрать те, которые удовлетворяют условию а).

В результате получим, что в случае а) исходное неравенство выполняется при $x \le -3$ и при $x \ge \frac{1}{2}$.

В случае б) исходное неравенство принимает вид $-3x-2 \ge 0$.

Условие б) удовлетворяется при $-3 < x < 0$, так что из всех $x \le -\frac{2}{3}$ остается лишь значения x из интервала $-3 < x < -\frac{2}{3}$. Объединяя решения, найденные в случаях а) и б) получаем ответ: $x \le -\frac{2}{3}$ и $x \ge \frac{1}{2}$.

Освобождаясь от модулей в примерах, где имеются абсолютные величины нескольких выражений, в принципе приходится рассматривать все возможные комбинации знаков этих выражений.

Однако тогда обилия случаев можно избежать и ограничиться меньшим числом комбинации знаков с помощью специального приема – *методом интервалов*.

3. Решить неравенство: $|x-1|-|x|+|2x+3| > 2x+4$.

Решение. В этой задаче при полном переборе всех комбинаций знаков пришлось бы рассматривать 8 логически возможных случаев. Но, используя метод интервалов, можно ограничится всего четырьмя.

Отметим на числовой оси те значения x, при которых выражения стоящие под знаком абсолютной величины, обращаются в нуль: это точки $1, 0$ и $-\frac{3}{2}$.

Следовательно, вся числовая ось разбивается на четыре интервала:

а) $x < -\frac{3}{2}$; б) $-\frac{3}{2} \le x < 0$;

в) $0 \le x < 1$; *г)* $1 \le x$.

Рассмотри по очереди каждую из этих областей.

а) $x < \frac{3}{2}$. В этом случае $2x+3<0, x<0$ и $x-1<0$, т.е. исходное неравенство принимает вид

$$-x+1+x-2x-3 > 2x+4,\ -4x > 6,\ x < -\frac{3}{2}$$

Оно удовлетворяется при $x < -\frac{3}{2}$; в сочетании с условием а) получаем, что $x < -\frac{3}{2}$ есть решение нашего исходного неравенства.

б) $-\frac{3}{2} \le x < 0$. В этом случае $2x+3 \ge 0, x<0$ и $x-1<0$; поэтому исходное неравенство принимает вид

$$-x+1+x+2x+3 > 2x+4 \text{, т.е. } 0>0$$

Следовательно, нет решения.

в) $0 \le x < 1$. В данном случае $2x+3 \ge 0,\ x \ge 0$, и $x-1<0$, тогда неравенство $|x-1|-|x|+|2x+3| > 2x+4$ примет следующий вид: $-x+1-x+2x+3 > 2x+4$.

Отсюда следует, что $x<0$, т.е. последнее неравенство удовлетворяется при $x<0$, но это соотношение не согласуется с условием $0 \le x < 1$. Следовательно, среди значений x из промежутка $0 \le x < 1$ нет решений исходного неравенства.

г) Рассмотрим последнюю область $x \ge 1$.

В этом случае неравенство принимает вид: $x-1-x+2x+3 > 2x+4$; Отсюда следует, что $2>4$.

Следовательно, среди $x \ge 1$ нет значений, удовлетворяющих исходному неравенству.

Итак, ответ нашего неравенства $x < -\frac{3}{2}$.

4. Решить уравнение $\sqrt{4x^2+5x-2} = 2$.

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$4x^2+5x-2=4,\ 4x^2+5x-6=0 \Rightarrow\ x_1=-2, x_2=\frac{3}{4}.$$

Проверка: $\sqrt{4\cdot(-2)^2+5\cdot(-2)-2} = \sqrt{16-10-2} = \sqrt{4} = 2,\ 2=2$ верно при $x=-2$,

$$\sqrt{4\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+5\cdot\frac{3}{4}-2} = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{15}{4}-2} = \sqrt{4} = 2,\ 2=2 \text{ верно при } x=\frac{3}{4}.$$

Ответ: $x=-2,\ x=-\frac{3}{4}$.

5. Решить уравнение $x-\sqrt{x+1}=5$.

Решение.

$$\sqrt{x+1}=x-5 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+1=(x-5)^2 \\ x-5 \ge 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x+1=x^2-10x+25 \Rightarrow x^2-11x+24=0,\ x_1=8, x_2=3;$$

неравенство $x-5 \ge 0$ выполнено только для $x=8$.

Ответ: $x=8$.

6. Решить уравнение $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+6}=7$.

Решение. $\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+6}=7 \Rightarrow \sqrt{x+4}=7-\sqrt{2x+6}$.

$\left(\sqrt{x+4}\right)^2=\left(7-\sqrt{2x+6}\right)^2 \Rightarrow x+4=49-14\cdot\sqrt{2x+6}+2x+6$, $x+4-49-2x-6=-14\sqrt{2x+6}$;

$x+51=14\sqrt{2x+6}$; возведем обе части последнего уравнения в квадрат, после чего получим следующее квадратное уравнение:

$$x^2-290x+1425=0 \Rightarrow x_1=5; x_2=285.$$

Проверка: $\sqrt{5+4}+\sqrt{10+6}=7, 7=7$ верно при $x=5$; $x=285-$ посторонний корень.

Ответ: $x=5$.

7. Решить уравнение $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x+4}=\sqrt{2x^2+2x+9}$**.**

Решение. Обозначим $t=x^2+x+1$, тогда $x^2+x+4=t+3$ и $2x^2+2x+9=2t+7$.

Следовательно, наше уравнение примет следующий вид:

$\sqrt{t}+\sqrt{t+3}=\sqrt{2t+7} \Rightarrow$ $\sqrt{t+3}=\sqrt{2t+7}-\sqrt{t}$. Возведем в квадрат обе части последнего уравнения: $\left(\sqrt{t+3}\right)^2=\left(\sqrt{2t+7}-\sqrt{t}\right)^2$, $t+3=2t+7-2\sqrt{t}\cdot\sqrt{2t+7}+t \Rightarrow 2t+4=2\sqrt{t\cdot(2t+7)}$.

$(2t+4)^2=\left(2\cdot\sqrt{t\cdot(2t+7)}\right)^2 \Rightarrow t^2+3t-4=0$, корни которой есть $t_1=-4, t_2=1$.

Возвращаемся к замене $t=x^2+x+1$:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+x+1=1 \\ x^2+x+1=-4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x+1-1=0 \\ x^2+x+1+4=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x=0 \\ x^2+x+5=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x(x+1)=0 \Rightarrow x=0; x=-1. \\ x^2+x+5=0 \Rightarrow D=1-4\cdot5\cdot1=-19<0 \end{array}\right.$$

второе уравнение последней системы не имеет решений.

Ответ: $x_1=0, x_2=-1$.

8. Решить уравнение $|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9$**.**

Решение. Отметим на числовой оси те значения x, при которых выражения стоящие под знаком абсолютной величины, обращаются в нуль: это точки $2, 3$ и 4.

Числовая прямая разобьется на следующие промежутки:

$(-\infty;2]; (2;3]; (3;4]; (4;+\infty)$. Решим данное уравнение на каждом из промежутков:

а) $\begin{cases} -\infty<x\le 2 \\ -(x-2)-(x-3)-(2x-8)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 2, \\ x=1, \end{cases}$ решение $x=1$.

б) $\begin{cases} 2<x\le 3 \\ x-2-(x-3)-(2x-8)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2<x\le 3, \\ x=0, \end{cases}$ нет решения, т.к. $x=0$ вне рассматриваемого промежутка.

c) $\begin{cases} 3 < x \le 4 \\ (x-2)+(x-3)-(2x-8)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x \le 4, \\ 3 = 9, \end{cases}$ не имеет решения, т.к. $3 \ne 9$.

d) $\begin{cases} 4 < x < +\infty \\ (x-2)+(x-3)+(2x-8)=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ x = \dfrac{11}{2}, \end{cases}$ решение $x = \dfrac{11}{2}$

Ответ: $x = 1,\ x = \dfrac{11}{2}$.

9. Решить неравенство $|x+2|+|x-5|>11$.

Решение.

Найдем те значения x, при которых выражения, стоящие под знаком абсолютной величины, обращаются в нуль:

а) $x+2=0$ б) $x-5=0$

$x=-2$ $x=5$.

Это точки -2 и 5, которые разбивают числовую ось на три промежутка $(-\infty;-2)$; $[-2;5]$; $(5;+\infty)$.

Рассмотрим по очереди каждую из этих областей.

а) $\begin{cases} x < -2 \\ -(x+2)-(x-5) > 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x < -4 \end{cases} \Rightarrow x < -4$.

б) $\begin{cases} -2 \le x \le 5 \\ x+2-(x-5) > 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le x \le 5 \\ 7 > 11 \end{cases} \Rightarrow$ не имеет решения.

c) $\begin{cases} x > 5 \\ x+2+x-5 > 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ x > 7 \end{cases} \Rightarrow x > 7$.

Ответ: $x \in (-\infty;-4) \cup (7;+\infty)$.

3. Функция. Область определения функций.

Переменная величина ***y*** *называется функцией (однозначный) от переменной величины* ***x****, если они связаны между собой так, что каждому рассматриваемому значению величины* ***x*** *(допустимые значения) соответствует единственное вполне определенное значение величины* ***y****.*

Переменная ***x*** при этом называется *аргументом* или *независимой переменной*, ***y*** называется *зависимой переменой*.

Совокупность всех значений независимой переменой *x,* для которых функция *y* определена, называется *областью определения* или *областью существования этой функции.*

Наиболее часто область определения функции представляет собой интервал

$(a, в)$ т.е. совокупность всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $a < x < в$

(здесь значение $x = a$ и $x = в$ не включается)

В некоторых случаях областью определения функции является полуинтервал, закрытый слева, $[a; в)$, или закрытый справа, $(a; в]$, т.е. множества чисел *x*, определяемых условием $a \le x < в$ или соответственно $a < x \le в$.

Множество точек, представляющее собой или интервал, или отрезок, или полуинтервал, будем называть *промежутком*.

При отыскании области определения функции следует помнить следующее:

1) Знаменатель дробного выражения не должен обращаться в нуль.

(Например, $y = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$, область определения данной функции находится из условия $x^2 - 4 \ne 0$);

2) Выражения, находящиеся под знаком корня четной степени, должны быть неотрицательными (Например, $y = \sqrt[4]{\frac{x^2 + 2x}{x + 1}}$, область определения данной функции определяется из условия $\frac{x^2 + 2x}{x + 1} \ge 0$ или функция $y = \sqrt{x^2 + 5x - 6}$, область определения которой определяется из условия $x^2 + 5x - 6 \ge 0$);

3) Выражения, возводимые в иррациональную степень, а также в степень, содержащую в показателе аргументы, должны быть положительными, а при положительном показателе – неотрицательными. (Например, область определения функции $y = x^{\lg 2}$ определяется условием $x \ge 0$);

4) Выражения, находящиеся под знаком логарифма, должны быть положительными. (Например, область определения функции $y = \lg\left(3x^2 - 2\right)$ определяется из условия $3x^2 - 2 > 0$);

5) Выражения, находящиеся под знаком арксинуса или арккосинуса, не должны по абсолютной величине превосходить единицу (например, область определения функции $y = \arccos\frac{1-2x}{3}$ будет определена при условии $-1 \le \frac{1-2x}{3} \le 1$);

6) Выражения, находящиеся под знаком тангенса или секанса, не должны равняться $\frac{2k+1}{2}\pi$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$;

7) Выражения, находящиеся под знаком котангенса или косеканса, не должны равняться $k\pi$, где $k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$.

Иногда, условия задачи налагают ограничения на область определения функции. Так, в уравнении движения $S = \frac{1}{2}gt^2$ мы должны считать время $t \ge 0$.

Примеры. Найти область определения функции: а) $y = \frac{x^2+4}{x^2-4}$; б) $y = \sqrt[4]{\frac{x^2+2x}{x+1}}$;

в) $y = \frac{x}{\sin 2x}$; г) $y = \lg(1-x)^2$; д) $y = \arcsin\frac{x^3}{2}$; е) $y = 2^{tg\frac{1}{x}}$

Решение.

а) Область определения найдется из условия $x^2 - 4 \ne 0$, решением которого является три промежутка: $(-\infty; -2), (-2; 2); (2; +\infty)$.

б) Должно быть: $\frac{x^2+2x}{x+1} \ge 0$ и $x+1 \ne 0$. Или $x(x+2)(x+1) \ge 0$ и $x \ne -1$. Т.к. решения неравенства (при условии $x \ne -1$) составляют промежутки $[-2; -1)$ и $[0; +\infty)$, то эти промежутки и дадут область определения исходной функции.

в) Область определения есть множество всех вещественных чисел, исключая корни уравнения $\sin 2x = 0$. Последние же суть числа $\frac{k\pi}{2}$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

г) Область определения данной функции определяется из условия: $(1-x)^2 > 0$, что имеет место при $x \ne 1$. Следовательно, область определения функции состоит из промежутков $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$.

д) Функция $\arcsin\frac{x^3}{2}$ имеет смысл при $-1 \le \frac{x^3}{2} \le 1$. Отсюда $-\sqrt[3]{2} \le x \le \sqrt[3]{2}$. Следовательно, область определения есть промежуток $[-\sqrt[3]{2}; \sqrt[3]{2}]$.

е) Функция имеет смысл при всех тех значениях x, при которых имеют смысл $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x}$. Но $\operatorname{tg}\frac{1}{x}$ не имеет смысл при $\frac{1}{x}=\frac{2k+1}{2}\pi$, а $\frac{1}{x}$ при $x=0$. Поэтому, если из множества всех вещественных чисел исключить $x=0$ и $x=\frac{2}{(2k+1)\pi}$, где $k=0,\pm 1,\pm 2$, …, то получим область определения данной функции.

4.Предел последовательности. Предел функции.

1) Предел последовательности.

Число A называется пределом последовательности $y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ...$, если по мере возрастания номера n выражение y_n неограниченно приближается к A.

Запись: $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

Значок $n \to \infty$ подчеркивает, что номер n неограниченно возрастает («стремится к бесконечности»).

Пример 1. Рассмотрим последовательность

$$y_1 = 0{,}3;\ y_2 = 0{,}33;\ y_3 = 0{,}333\ldots$$

Член y_n неограниченно приближается к $\frac{1}{3}$. Следовательно, $\frac{1}{3}$ есть предел исходной последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{3}.$$

Замечание. Разность $y_n - \frac{1}{3}$ последовательно равна

$$y_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{30};\ y_2 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{300}\ \cdots\ y_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3000};\ \text{т.е. } y_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3\cdot 10^n}.$$

Неограниченность приближения y_n к $\frac{1}{3}$ выражается в том, что абсолютная величина разности $\left|y_n - \frac{1}{3}\right|$, начиная с некоторого номера N, остается меньше любого (заранее данного) положительного числа ε.

Так, если задать $\varepsilon = 0{,}01$, то $N = 2$, т.е. начиная со второго номера, абсолютная величина $\left| y_n - \frac{1}{3} \right|$ остается меньшей $0{,}01$.

Если задать $\varepsilon = 0{,}005 \left(= \frac{1}{200} \right)$, то по-прежнему $N = 2$. Если $\varepsilon = 0{,}001$, то $N = 3$, если $\varepsilon = 0{,}00001$, то $N = 5$ и т.д.

Теперь будет понятна следующая формулировка определения, приведенного в начале параграфа.

Определение. *Число* A *называется пределом последовательности* $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$, ..., если абсолютная величина разности $y_n - A$, начиная с некоторого номера N , остается меньшей любого заранее данного положительного числа ε:

$$\left| y_n - A \right| < \varepsilon \text{ при } \quad n \ge N,$$

где $N = N(\varepsilon)$.

Пример 1. Последовательность $y_n = (-1)^n$ не имеет предела: члены $y_1 = -1, y_2 = 1, y_3 = -1, y_4 = 1$ и.т.д. не стремятся ни к какому постоянному числу.

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}$.

Решение. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{2n^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$

Здесь при $n \to \infty$ получаем неопределенное выражение $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим и числитель и знаменатель на наибольшую степень n^2:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{2n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}{\frac{2n^2}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} 1 + \lim\limits_{n \to \infty} \frac{2}{n} + \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n \to \infty} 2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}$.

Решение. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n!}{n!(n+1) - n!} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n!}{n!(n+1-1)} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

2) Предел функции.

Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$ (читается: «при x, стремящемся к a»), если, по мере того как x приближается к a - будь то справа или слева, - значение $f(x)$ неограниченно приближается («стремится») к A.

$$\text{Запись: } \lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

Замечание. Предполагается, что функция $f(x)$ определена внутри некоторого промежутка, содержащего точку $x \to a$ (во всех точках справа и слева от a); в самой же точке $x \to a$ функция $f(x)$ либо определена, либо нет (последний случай не менее важен, чем первый).

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$ (она определена во всех точках, кроме $x = \frac{1}{2}$). Возьмем $x = 6$. Тогда $f(x) = f(6) = \frac{4 \cdot 6^2 - 1}{2 \cdot 6 - 1} = 13$.

По мере приближения x к 6 (справа или слева) числитель $4x^2 - 1$ стремится к 143, а знаменатель – к 11. Вся дробь стремится к $\frac{143}{11} = 13$. Число 13 (равное значению функции при $x = 6$) есть вместе с тем предел функции при $x \to 6$: $\lim\limits_{x \to 6} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 13$

Пример 2. Рассмотрим ту же функцию $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$, но возьмем $x = \frac{1}{2}$. Функция $f(x)$ здесь не определена (формула дает неопределенное выражение $\frac{0}{0}$), т.е.

$$\frac{4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1}{2 \cdot \frac{1}{2} - 1} = \left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Но предел функции при $x \to \frac{1}{2}$ существует. Он равен 2. Действительно, выражение $\frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$ неопределенно только при x, равном $\frac{1}{2}$, но при приближении к $\frac{1}{2}$ оно вполне определено и всегда равно $2x + 1$. А последнее выражение стремится к числу 2, т.е.

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(2x)^2 - 1}{2x - 1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{(2x - 1)(2x + 1)}{2x - 1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} (2x + 1) = 2.$$

Основные теоремы о пределах:

1. Предел постоянной величины:

$$\lim_{x\to a} A = A.$$

2. Предел суммы (разности) конечного числа функции:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\pm\varphi(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a}\varphi(x).$$

3. Предел произведения конечного числа функции:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\varphi(x).$$

4. Предел частного двух функций:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)},\quad \lim_{x\to a}\varphi\neq 0.$$

5. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x\to a}\left[C\cdot f(x)\right]=C\cdot\lim_{x\to a} f(x).$$

Замечательные пределы:

а) I-й замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

б) II-й замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{a\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e,$$

где $e = 2{,}71828...$

Эквивалентные бесконечно малые величины:

$$\sin x\sim x;\quad \sin 2x\sim 2x;\quad \mathrm{tg}x\sim x\;;$$

$$\sin^2 x\sim x^2;\ \arcsin x\sim x\ ;\ \mathrm{arctg}x\sim x;$$

$$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2};\ a^2-1\sim x\ln a\quad \textbf{при}\quad x\to 0.$$

Отметим также, что

$$\lim_{x\to a}\frac{C}{f(x)}=0,\ \textit{если}\ \lim_{x\to a} f(x)=\infty;$$
$$\lim_{x\to a}\frac{C}{f(x)}=\infty,\ \textit{если}\ \lim_{x\to a} f(x)=0;$$
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0,\ \textit{если}\ \lim_{x\to a} f(x)=0, \lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty;$$
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\infty,\ \textit{если}\ \lim_{x\to a} f(x)=\infty, \lim_{x\to a}\varphi(x)=0.$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x+4}{x-2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x+4}{x-2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 5}(x+4)}{\lim\limits_{x\to 5}(x-2)}=\dfrac{9}{3}=3.$

Пример 4. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+4}{x-2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+4}{x-2}=\dfrac{6}{0}=\infty$

Замечание: Если предел делителя равен нулю, а предел делимого не равен нулю, то частное имеет бесконечный предел.

Пример 5. Найти предел $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{(2x)^3-1}{6x^2-5x+1}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{(2x-1)(3x-1)}=$

$$=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2+2x+1}{3x-1}=\frac{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}+1}{3\cdot\frac{1}{2}-1}=6$$

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5.}$.

Решение. Функции $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ здесь не определена (формула дает неопределенное выражение $\dfrac{0}{0}$ при $x\to 5$).

Умножим и разделим выражение $\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ на сопряженное числителя $\sqrt{x-1}+2;$ тем самым избавимся от иррациональности в числителе:

$$\lim_{x\to 5}\frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)}=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\sqrt{x-1}+2}=\frac{1}{4}$$

Пример 7. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$.

Решение. Подставив вместо x бесконечность ∞, получим неопределенность вида (∞)$^{\infty}$.

Для ее раскрытия воспользуемся замечательным пределом $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2-6}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{6}{3x+2}\right)^{-\frac{3x+2}{6}}\right]^{-\frac{x+1}{2}\cdot\frac{6}{3x+2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}-\frac{3x+3}{3x+2}}=$$

$$=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

Пример 8. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+.....+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

Решение.

Т.к. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+.....+\frac{1}{n(n+1)}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+.....+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+.....+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Решение.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

Решение.

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}$$

$$S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{5}{2^3}-\frac{3}{2^3}\right)+\ldots+\left(\frac{2n-1}{2^n}-\frac{2n-3}{2^n}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$S_n=1+1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+2-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}3-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-2}}-2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=3.$$

3). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}\right)$.

Решение.

$S_n=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{2}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=2^{1-\frac{1}{2^n}}=\dfrac{2}{2^{\frac{1}{2^n}}}$. При $n>2$

$$2=\left(2^{\frac{1}{2^n}}\right)^{2^n}=\left(1+\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)\right)^{2^n}>\left(1+\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)\right)^{n}=1+n\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)+\ldots+\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)^n>n\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right),\text{ т. е.}$$

$0<2^{\frac{1}{2^n}-1}<\dfrac{2}{n}$, тогда $2^{\frac{1}{2^n}}\to 1$ при $n\to\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=2$.

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}$.

Решение.

$$0<\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\ldots\frac{2}{n}\le 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}=\frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ т.к. } \left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0 \text{ при } n\to\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}=0.$$

5). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$; $\quad 1-\dfrac{1}{\kappa^2}=\dfrac{(\kappa-1)\cdot(\kappa+1)}{\kappa^2}$

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\ldots\frac{(n-1)\cdot(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}.$$

5. Понятие непрерывности функции

Если при постепенном изменении аргумента функция также меняется постепенно, то говорят, что функция непрерывна. При этом малому изменению аргумента отвечает малое изменение функции.

Определение: *Функция $y=f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки (включая саму точку) и предел функции в точке x_0 существует и равен значению функции в самый этой точке, т.е.*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A = f(x_0) = f\left[\lim_{x \to x_0} x\right]$$

Из определения следует, что приращение функции $\Delta f(x) = f(x) - f(x_0)$ стремится к нулю при приращении аргумента Δx, стремящееся к нулю, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Функция $y = f(x)$ *называется непрерывной на интервале*, если она определена на этом интервале и непрерывна в каждой точке интервала.

Геометрически непрерывность функции на интервале означает, что график этой функции на данном интервале есть сплошная линия без скачков и разрывов. Другими словами, отдельные точки на графике непрерывной (на интервале) функции можно (на данном интервале) соединять сплошной линией.

Если в каких – либо точках интервала функция не является непрерывной, то такие точки называются *точками разрыва*.

Точка a, принадлежащая области определения функции или являющаяся граничной для этой области, называется точкой разрыва, если в этой точке нарушается условия непрерывности функции.

Если существуют конечные пределы $\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$ и $\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a+0)$, причем не все три числа $f(a), f(a-0), f(a+0)$ равны между собой, то a называется *точкой разрыва I рода*.

Точки разрыва I рода подразделяются, в свою очередь, на точки устранимого разрыва (когда $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$), т.е. когда левый и правый пределы функции в точке a равны между собой, но не равны значению функции в этой точке) и на точки скачка (когда $f(a-0) \neq f(a+0)$, т.е. когда левый и правый пределы функции в точке a различны); в последнем случае разность $f(a+0) - f(a-0)$ называется скачком функции в точке a. Точки разрыва, не являющиеся точками разрыва I рода, называются *точками разрыва II рода*. В точках разрыва II рода не существует хотя бы один из односторонних пределов.

Сумма и произведение конечного числа непрерывных функций есть функция непрерывная. Частное от деления двух непрерывных функций есть функция непрерывная во всех точках, где делитель не равен нулю.

Пример 1. Функция $y=\frac{\sin x}{x}$ непрерывна всей числовой оси, кроме точки $x=0$, в которой функция не определена. Таким образом, точка $x=0$ есть точка разрыва функции $y=\frac{\sin x}{x}$, т.к. в определении непрерывной в точке функции участвует значение функции в данной точке, а оно в точке $x=0$ не определено.

Пример 2. Точкой разрыва функции $y=\frac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ служит точка $x=0$, в которой пределы функции слева и справа существуют, но не равны между собой, т.е. предел функции в точке $x=0$ не существует.

Действительно, $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{1}{1+2^{-\frac{1}{x}}}$, $\lim\limits_{x\to 0-0}\frac{2^{\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}}+1}=0$.

Пример 3. Точками разрыва функции $y=\frac{1}{x^2-1}$ будут точки $x=1$ и $x=-1$, в которых значения функции не определены и, следовательно, не выполняется определение непрерывности функции в точке.

Пример 4. Показать, что при $x=4$ функция $y=\frac{x}{x-4}$ имеет разрыв.

Решение: Находим $\lim\limits_{x\to 4-0}\frac{x}{x-4}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 4+0}\frac{x}{x-4}=+\infty$. Таким образом, функция при $x\to 4$ не имеет ни левого, ни правого конечного предела. Следовательно, $x=4$ является точкой разрыва II рода. (рис.1)

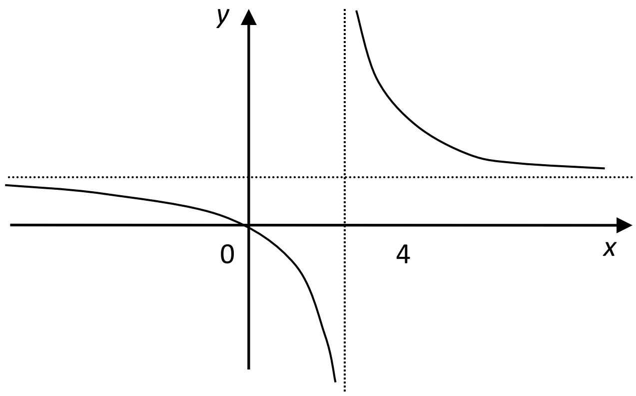


рис.1

6. Производная функция. Дифференциал.

1) Производная функции.

Пусть $y = f(x)$ некоторая непрерывная функция (т.е. функция, графически представляемая непрерывной линией), характеризующая зависимость y от x, ее график имеет вид, представленный на рис.2

Когда аргумент функции x получает приращение Δx, функция y получает приращение $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ (значения x и $x+\Delta x$ должны принадлежать области определения функции).

При уменьшении приращения аргумента Δx приращения функции Δy также уменьшается и их отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в общем случае претерпевает некоторое изменение.

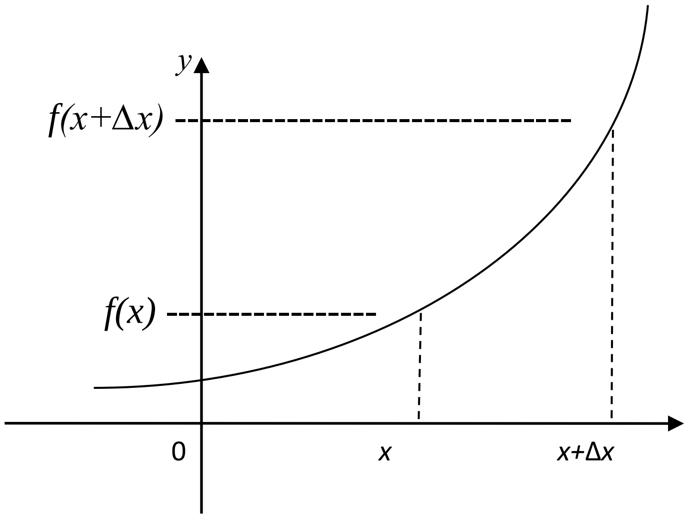


рис. 2

Определение. Функция, для которой в точке x существует конечная, т.е. не бесконечная, производная, *называется дифференцируемой в данной точке*.

Если функция имеет конечные производные во всех точках некоторого промежутка, то она называется дифференцируемой на данном промежутке, (при этом промежутком принимается интервал, отрезок или полуинтервал). Существуют функции (например, $y = \sin x, y = x^2$ и ряд других), дифференцируемые на всей области своего определения, т.е. во всех точках этой области. Наряду с ними существуют функции, не имеющие производных, т.е. не дифференцируемые по крайне мере в некоторых точках своей области определения.

Например, областью определения функции $y=|x|$ является множество всех действительных чисел, однако в точке $x=0$ эта функция не имеет производной.

Отметим, что, помимо обозначения производной в виде $y'(x)$, используют также эквивалентные обозначения $f'(x), \frac{dy}{dx} и \frac{df}{dx}$. Другими словами, производной от функции $f(x)$ называется предел, к которому стремится отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = y'.$$

Производной функции называется предел, к которому стремится отношение бесконечно малого приращения функции к соответствующему бесконечно малому приращению аргумента.

Пример 1. Найти значение производной от функции $y=x^2$ при $x=7$.

Решение. При $x=7$ имеем $y=7^2=49$. Дадим аргументу x приращение Δx, аргумент станет равным $7+\Delta x$, а функция получит значение $(7+\Delta x)^2$.

Приращение Δy функции равно $\Delta y=(7+\Delta x)^2-7^2=14\Delta x+\Delta x^2$.

Отношение этого приращения Δy к приращению Δx есть

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{14\Delta x+\Delta x^2}{\Delta x}=14+\Delta x.$$

Находим предел, к которому стремится $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}(14+\Delta x)=14.$$

Искомое значение производной равно 14, т.е.

$$y'(7)=14.$$

Пример 2. Найти производную от функции $y=\sin x$ (аргумент выражается в радианной мере).

Решение. Даем аргументу приращение Δx. Приращение функции есть

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}$$

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ равно $\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$.

Предел этого отношения при $\Delta x \to 0$ равен:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x.$$

Следовательно,

$$y'=\cos x.$$

Производные некоторых простейших функций

1. Производная постоянной величины равна нулю:

$$(C)'=0.$$

2. Производная независимой переменной равна единице:

$$(x)'=1$$

3. Производная степенной функции равна произведению показателя степени на степенную функцию, у которой показатель на единицу меньше;

$$\left(x^n\right)'=nx^{n-1}.$$

Примеры.

1) $\left(x^2\right)'=2x$

2) $\left(x^3\right)'=3x^2$

3) $\left(3\sqrt{x}\right)'=\left(x^{1/3}\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

4) $\left(\frac{1}{x^2}\right)'=\left(x^{-2}\right)'=-2x^{-3}=-\frac{2}{x^3}$.

Свойства производной.

1.Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$\left[a\cdot f(x)\right]'=a\cdot f'(x)$$

2.Производная от алгебраической суммы нескольких функций равна алгебраической сумме их производных:

$$[f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)]' = f_1'(x)+f_2'(x)-f_3'(x), \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right]' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Примеры.

1). $\left(4x^3\right)' = 4\left(x^3\right)' = 4\cdot 3x^2 = 12x^2$.

2). $\left(\dfrac{5}{x^3}\right)' = 5\left(\dfrac{1}{x^3}\right)' = 5\cdot\left(x^{-3}\right)' = 5\cdot(-3)\cdot x^{-4} = -15x^{-4}$.

3). $\left(\dfrac{x^3}{5}\right)' = \dfrac{1}{5}\left(x^3\right)' = \dfrac{1}{5}\cdot 3\cdot x^2 = \dfrac{3}{5}x^2$.

4). $\left(0{,}2x^3+4x^5-0{,}2\right)' = \left(0{,}2x^3\right)' + \left(4x^5\right)' - (0{,}2)' = 0{,}2\left(x^3\right)' + 4\left(x^5\right)' - (0{,}2)' = 0{,}6x^2 + 20x^4$.

2) Дифференциал

Пусть приращение функции $y = f(x)$ разбито на сумму двух членов:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha,$$

где A независим от Δx и α имеет высший порядок относительно Δx (при $\Delta x \to 0$). Тогда первый член, пропорциональный Δx, называется дифференциалом функции $f(x)$ и обозначается dy или $df(x)$ (читается: «дэ игрек», «дэ эф от икс»).

Пример 1. Возьмем функцию $y = x^3$, тогда $\Delta y = 3x^2\Delta x + \left(3x\Delta x^2 + \Delta x^3\right)$. Здесь коэффициент $A = 3x^2$ не зависит от Δx, так что первый член пропорционален Δx, другой же член $\alpha = 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$ имеем высший (второй) порядок относительно Δx. Стало быть, член $\alpha = 3x^2\Delta x$ есть дифференциал функции x^3:

$$dy = 3x^2\Delta x \text{ или } d\left(x^3\right) = 3x^2\Delta x.$$

Коэффициент A равен производной $f'(x)$, т.е. дифференциал функции равен произведению производной на приращение аргумента:

$$dy = y'\Delta x \text{ или } df(x) = f'(x)\Delta x.$$

Геометрический смысл дифференциала

Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Пусть $M(x, y)$ и $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ - две точки данной кривой (рис. 3).

В точке M проведем касательную MT к графику функции (здесь T - точка пересечения касательной с $M'N \,//\, Oy$) и рассмотрим ΔMTN с катетами $MN = \Delta x$ и NT $(MN \,//\, Ox, NT \,//\, Oy)$.

Если через φ обозначить угол, образованный касательной MT с положительным направлением оси Ox, то будем иметь $NT = \Delta x \cdot \mathrm{tg}\varphi$.

Но из геометрического смысла производной следует, что $\mathrm{tg}\varphi = f'(x) = y'$.

Поэтому

$$MNT = y'\Delta x = dy$$

Таким образом, ***имеем теорему***: Дифференциал функции $y = f(x)$ в данной точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x получает приращение Δx, т.е. дифференциал функции графически изображается приращением ординаты касательной.

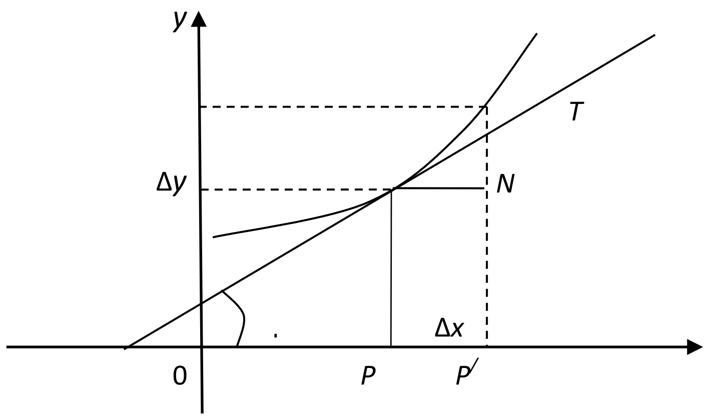


рис.3

Свойства дифференциала

1. Постоянный множитель можно вынести за знак дифференциала:

$$d[a \cdot f(x)] = a \cdot df(x). \ a - const.$$

2.Дифференциал алгебраической суммы нескольких функций равен алгебраической сумме их дифференциалов:

$$d\left[f_1(x)+f_2(x)-f_3(x)\right]=df_1(x)+df_2(x)-df_3(x).$$

3.Дифферинцеал функции равен произведению производной на дифференциал аргумента:

$$df(x)=f'(x)dx$$

Дифференциал произведения. Дифференциал произведения двух функций равен сумме произведений каждой из функций на дифференциал другой:

$$d(uv)=udv+vdu$$

Для трех сомножителей имеем:

$$d(uvw)=vwdu+uwdv+uvdw$$

Производная произведения вычисляется по тому же правилу (слово «дифференциал» оба раза заменяется словом «производная»):

$$(uv)'=uv'+u'v$$

$$(uvw)'=vw\cdot u'+uw\cdot v'+uv\cdot w'$$

Пример 1. Найти дифференциал и производную от функции $y=(2x^2+3x)(x^3-2)$.

Решение.

$$d\left[(2x^2+3x)(x^3-2)\right]=(2x^2+3x)d(x^3-2)+(x^3-2)d(2x^2+3x)=(2x^2+3x)3x^2dx+(x^3-2)(4x+3)dx=$$
$$=(10x^4+12x^3-8x-6)dx.$$

Коэффициент $10x^4+12x^3-8x-6$ есть производная, т.е. $y'=\left((2x^2+3x)(x^3-2)\right)'=$

$$=(2x^2+3x)(x^3-2)'+(x^3-2)(2x^2+3x)'=10x^4+12x^3-8x-6$$

Дифференциал частного. Дифференциал дроби равен произведению знаменателя на дифференциал числителя минус произведение числителя на дифференциал знаменателя, все деленное на квадрат знаменателя:

$$d\,\frac{u}{v}=\frac{vdu-udv}{v^2},\ v\neq 0.$$

Пример. Найти y', если $y=\dfrac{2x+1}{x^2+1}$.

Решение. $y'=\dfrac{(x^2+1)(2x+1)'-(2x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2(x^2+1)-2x(2x+1)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2(-x^2-x+1)}{(x^2+1)^2}.$

Дифференцирование логарифмической функции. Дифференциал и производная натурального логарифма выражается формулами:

$$d\ln x = \frac{dx}{x},\ \ y' = \frac{d\ln x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Если основание логарифма натуральное число, то

$$d\log_a x = \log_a e\frac{dx}{x},\ \ y' = \frac{d}{dx}\log_a x = \log_a e\cdot\frac{1}{x}$$

В частности, для десятичных логарифмов

$$d\lg x = \frac{Mdx}{x},\ \ y' = \frac{d\lg x}{dx} = M\cdot\frac{1}{x,}$$

где $M \approx 0{,}4343$ - модуль перехода от натуральных логарифмов к десятичным.

Пример 1. Найти без таблиц $\lg 101$.

Решение. Приращение $\Delta\lg x$ приближенно равно дифференциалу $d\lg x = \dfrac{M\Delta x}{x}$. При $x = 100$ и $\Delta x = 1$ получаем $\Delta\lg x \approx \dfrac{0{,}4343\cdot 1}{100} \approx 0{,}0043.$

Следовательно, $\lg 101 = \lg 100 + \Delta\lg 100 \approx 2 + 0{,}0043 = 2{,}0043$, что совпадает с табличным значением.

При дифференцировании выражений, имеющих вид, удобный для логарифмирования, можно предварительно выполнить логарифмирование.

Пример 2. Продифференцировать функцию $y = x^x$:

1. Логарифмируем по основание e:

$$\ln y = x\ln x \tag{1}$$

2. Дифференцируем обе части равенства (1):

$$\frac{y'}{y} = x(\ln x)' + \ln x = 1 + \ln x \tag{2}$$

3. Выразим y' из (2) и подставим вместо y выражение x^x:

$$y' = y(1+\ln x) = x^x(1+\ln x)$$

Изложенный способ *называется логарифмическим дифференцированием*. Производная от логарифма функции $y = f(x)$

$(\ln y)' = \dfrac{y'}{y} = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ – *логарифмической производной* от функции $f(x)$.

Пример 3. Продифференцировать функцию $y = xe^{-x^2}$.

Решение.

а) $\ln y = \ln\left(xe^{-x^2}\right)$ или $\ln y = \ln x - x^2$

б) $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x} - 2xdx$.

с) $dy = x \cdot e^{-x^2}\left(\dfrac{1}{x} - 2x\right)dx = e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right)dx.$

Дифференцирование показательной функции $\left(y = e^x, y = a^x\right)$.

Дифференциал и производная показательной функции e^x [где $e = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x \approx 2{,}71828$]

выражаются формулами $de^x = e^x dx, y' = e^x$.

При произвольном основании, a имеем:

$$da^x = a^x \ln a \cdot dx$$
$$y' = a^x \ln a$$

В частности,

$$d10^x = 10^x \frac{1}{M}dx,\ y' = 10^x \frac{1}{M},$$

здесь $\dfrac{1}{M} = \ln 10 \approx 2{,}3026$.

Примеры.

1. Найти производную функции $y = e^{3x}$.

Решение. $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(e^{3x}\right) = e^{3x}\dfrac{d}{dx}(3x) = 3e^{3x}$.

2. Найти дифференциал функции $y = 7^{t^2}$.

Решение. $d\left(7^{t^2}\right) = 7^{t^2}\ln 7 \cdot d\left(t^2\right) = 2t \cdot 7^{t^2} \cdot \ln 7 \cdot dt.$

Дифференцирование тригонометрических функций

Дифференциалы:	Производные:
I. $d\sin x = \cos x \cdot dx$	$(\sin x)' = \cos x \cdot x'$
II. $d\cos x = -\sin x \cdot dx$	$(\cos x)' = -\sin x \cdot x'$

III. $d\,\mathrm{tg}x = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$ $\qquad$ $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{x'}{\cos^2 x}$

IV. $d\,\mathrm{ctg}x = -\dfrac{dx}{\sin^2 x}$ $\qquad$ $(\mathrm{ctg}x) = -\dfrac{x'}{\sin^2 x}$

Примеры.

Найти производные функции:

1) $y = \sin 2x$

Решение. $y' = (\sin 2x)' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2\cos 2x.$

2) $y = \cos^3 4x$

Решение. $y' = (\cos^3 4x)' = 3\cos^2 4x \cdot (\cos 4x)' = 3\cos^2 4x(-\sin 4x)\cdot(4x)' = -12\cos^2 4x \cdot \sin 4x.$

3) $y = \mathrm{tg}5x$

Решение. $y' = (\mathrm{tg}5x)' = \dfrac{(5x)'}{\cos^2 5x} = \dfrac{5}{\cos^2 5x}.$

Дифференцирование обратных тригонометрических функций.

Дифференциалы: $\qquad$ Производные:

I. $d\arcsin x = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $(\arcsin x)' = \dfrac{x'}{\sqrt{1-x^2}}$

II. $d\arccos = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ $\qquad$ $(\arccos x)' = -\dfrac{x'}{\sqrt{1-x^2}}$

III. $d\,\mathrm{arctg}x = \dfrac{dx}{1+x^2}$ $\qquad$ $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{x'}{1+x^2}$

IV. $d\,\mathrm{arcctg}x = -\dfrac{dx}{1+x^2}$ $\qquad$ $(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{x'}{1+x^2}$

Найти производную следующих функций:

1) $y = \arcsin\dfrac{4}{x}$

Решение. $y' = \left(\arcsin\dfrac{4}{x}\right)' = \dfrac{\left(\dfrac{4}{x}\right)'}{\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{x}\right)^2}} = -\dfrac{4}{x\sqrt{x^2-16}}.$

2) $y = \operatorname{arctg}^5 3x$

Решение. $y' = \left(\operatorname{arctg}^5 3x\right)' = 5\operatorname{arctg}^4 3x\cdot\left(\operatorname{arctg}3x\right)' = 5\operatorname{arctg}^4 3x\cdot\dfrac{(3x)'}{1+(3x)^2} = \dfrac{15}{1+9x^2}\operatorname{arctg}^4 3x.$

3) $y = 7(x-1)^3 - \dfrac{8x}{\sqrt[4]{x}} + \dfrac{9x+3}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение.

$$y' = \left(7(x-1)^3\right)' - \left(\frac{8x}{\sqrt[4]{x}}\right)' + \left(\frac{9x+3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' = 7\cdot 3(x-1)^2 - \frac{8\cdot\sqrt[4]{x} - 8x\cdot 0{,}25x^{\frac{1}{4}-1}}{\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2} + \frac{9\cdot\sqrt[3]{x^2} - (9x+3)\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}}{\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^2} =$$

$$= 21(x-1)^2 + \frac{6}{\sqrt[4]{x}} + \frac{3\sqrt[3]{x^2} - 2x^{-\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{x^4}}.$$

4) $y = \dfrac{x}{e^{2x-1}}$.

Решение.

$$y' = \frac{x'\cdot e^{2x-1} - x\cdot(e^{2x-1})'}{\left(e^{2x-1}\right)^2} = \frac{e^{2x-1} - 2x\cdot e^{2x-1}}{\left(e^{2x-1}\right)^2} = \frac{e^{2x-1}(1-2x)}{\left(e^{2x-1}\right)^2} = \frac{1-2x}{e^{2x-1}}.$$

5) $y = \ln\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2} + \cos^2 4x\right)$.

Решение.

$$y' = \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \cos^2 4x}\cdot\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \cos^2 4x\right)' = \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \cos^2 4x}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{x^2}{4}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)' + 2\cos 4x\cdot(\cos 4x)'\right) =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \cos^2 4x}\cdot\left(\frac{1}{2+\frac{x^2}{2}} + 2\cos 4x\cdot(-\sin 4x)\cdot 4\right) = \frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + \cos^2 4x}\cdot\left(\frac{2}{4+x^2} - 8\cos 4x\cdot\sin 4x\right).$$

6) $y = 2^{x^2-1}\cdot\operatorname{tg}\sqrt{x}$.

Решение.

$$y' = \left(2^{x^2-1}\right)' \cdot \mathrm{tg}\sqrt{x} + 2^{x^2-1} \cdot \left(\mathrm{tg}\sqrt{x}\right)' = 2^{x^2-1} \cdot \ln 2 \cdot \left(x^2-1\right)' \cdot \mathrm{tg}\sqrt{x} + 2^{x^2-1} \cdot \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \left(\sqrt{x}\right)' =$$

$$= 2x \cdot 2^{x^2-1} \cdot \ln 2 \cdot \mathrm{tg}\sqrt{x} + \frac{2^{x^2-1}}{2\sqrt{x} \cdot \cos^2\sqrt{x}}.$$

7) $y = \left(\frac{x}{2+x}\right)^x$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{x}{2+x}\right)^x \cdot \left(x' \cdot \ln\frac{x}{2+x} + \frac{\left(\frac{x}{2+x}\right)' \cdot x}{\frac{x}{2+x}}\right) = \left(\frac{x}{2+x}\right)^x \cdot \left(\ln\frac{x}{2+x} + \frac{\frac{\left(x' \cdot (2+x) - x \cdot (2+x)'\right) \cdot x}{(2+x)^2}}{\frac{x}{2+x}}\right) =$$

$$= \left(\frac{x}{2+x}\right)^x \cdot \left(\ln\frac{x}{2+x} + \frac{2x \cdot (2+x)}{(2+x)^2 \cdot x}\right) = \left(\frac{x}{2+x}\right)^x \cdot \left(\ln\frac{x}{2+x} + \frac{2}{2+x}\right).$$

***Примечание*: Пример № 5 решен по следующей формуле:**

$$\left[u(x)^{\upsilon(x)}\right]' = \left(u(x)\right)^{\upsilon(x)} \cdot \left(\upsilon'(x) \cdot \ln u(x) + \frac{u'(x) \cdot \upsilon(x)}{u(x)}\right).$$

Производные гиперболических функций

Выражения $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ *и их отношения называются соответственно гиперболическими синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом и обозначаются*

$$\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \mathrm{th} = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x},\ \mathrm{cth}x = \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x}.$$

Свойства гиперболических функций:

1. $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1;$
2. $\mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}2x;$
3. $\mathrm{sh}2x = 2\,\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}x;$
4. $\mathrm{sh}0 = 0, \mathrm{ch}0 = 1$
5. $(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x,\ (\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x;$
6. $(\mathrm{th}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x},\ (\mathrm{ch}x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

Найти производные функций.

Пример 1. $y = \mathrm{sh}^2 x$.

Решение. $y' = \left(\mathrm{sh}^2 x\right)' = 2\mathrm{sh}x\left(\mathrm{sh}x\right)' = 2\,\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}x$. Согласно свойству (3) $2\,\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}x$ есть $\mathrm{sh}2x$. Следовательно, $y' = \mathrm{sh}2x$.

Ответ. $\mathrm{sh}2x$

Пример 2. $y = x - \mathrm{cth}x$.

Решение. $y' = \left(x - \mathrm{cth}x\right)' = 1 - \left(-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}\right) = 1 + \dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x} = \dfrac{\mathrm{sh}^2 x + 1}{\mathrm{sh}^2 x}$. Т.к. из первого свойства гиперболических функций следует, что $1 + \mathrm{sh}^2 x = \mathrm{ch}x$, то $y' = \dfrac{\mathrm{sh}^2 x + 1}{\mathrm{sh}^2 x} = \dfrac{\mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x} = \mathrm{cth}^2 x$.

Ответ. $\mathrm{cth}^2 x$

7. Дифференциал в приближенных вычислениях

Часто бывает, что функция $f(x)$ и ее производную $f'(x)$ легко вычислить при $x = a$, а для значения x, близких к a, непосредственное вычисление функции затруднительно. Тогда пользуются приближенной формулой

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h.$$

Она выражает, что приращение $f(a+h) - f(a))$ функции $f(x)$ при малых значениях h приближенно равно дифференциалу $f'(a) \cdot h$.

Пример 1. Извлечь квадратный корень из 3654.

Решение. $3654 = 3600 + 54,\ a = 3600,\ h = 54$.

Найдем значение функции $f(x) = \sqrt{x}$ при $x = 3654$. Легко вычисляется значение $f(x)$ и $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ при $x = 3600$: $f(a) = \sqrt{3600} = 60$, $f'(a) = \dfrac{1}{2 \cdot 60} = \dfrac{1}{120}$.

Пользуясь формулой приближенного вычисления $f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h$, вычислим, что $\sqrt{3654} = 60 + \dfrac{1}{120} \cdot 54 \approx 60{,}45$.

Пример 2. Найти без таблиц $\mathrm{tg}46^0$.

Решение. $f(x) = \mathrm{tg}x, a = 45^0, h = 1^0 = 0{,}0175$ радиана; тогда имеем $f'(a) = \dfrac{1}{\cos^2 45^0} = 2$, $f(a) = \mathrm{tg}45^0 = 1$.

Значит, $\mathrm{tg}46^0 \approx 1 + 2 \cdot 0{,}0175 = 1{,}0350$.

8. Производные высших порядков.

Пусть $f'(x)$ есть производная от функции $f(x)$, тогда производная от $f'(x)$ называется второй производной от функции $f(x)$ и обозначается $f''(x)$.

Вторая производная называется также производной второго порядка. В отличии от нее функция $f'(x)$ называют производной первого порядка, или первой производной.

Производная от второй производной называется третьей производной функции $f(x)$ (или производной третьего порядка); она обозначается $f'''(x)$.

Таким же образом определяются производная четвертого порядка $f^{IV}(x)$, пятого порядка $f^{V}(x)$ и т.д. (цифровые обозначения вместо штрихов употребляются для краткости римские цифры – для отличия от показателей степени). Производная *n*-го порядка обозначается $f^{(n)}(x)$.

Если функция обозначается одной буквой, например *y*, то ее последовательные производные обозначаются:

$$y', y'', y''', y^{IV}, y^{V}, \ldots\ldots, y^{(n)}.$$

Пример 1. Найти последовательные производные от функции $f(x) = x^4$.

Решение.

$$f'(x) = 4x^3,\ f''(x) = \left(4x^3\right)' = 12x^2,\ f'''(x) = \left(12x^2\right)' = 24x,\ f^{IV}(x) = (24x)' = 24,\ f^{V}(x) = (24)' = 0$$

Дальнейшие производные тоже равны нулю.

Пример 2. Если $y = \sin x$, то

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), y'' = -\sin x = \sin(x + \pi), y''' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right), \ldots, y^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Значения производных при данном значении аргумента *x=a* обозначаются $f'(a), f''(a), f'''(a)$ и т.д. В примере 1 при $x = 2$ имеем $f'(2) = 32, f''(2) = 48$ и т. д.

Пример 3. Если $f(x) = \ln(1 + x)$, то

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\ f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},\ f'''(x) = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},\ f^{(IV)}(x) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}, \ldots,\ f^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Значит, $f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = -1,\ f'''(0) = 1\cdot 2,\ f^{(IV)}(0) = -1\cdot 2\cdot 3, \ldots,\ f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$.

На случай производных любого порядка легко обобщаются правилами дифференцирования суммы (разности) и вынесения постоянного множителя за знак производной;

1) $(u \pm v)^{(n)} = (u)^{(n)} \pm (v)^{(n)}$

2) $(C \cdot u)^{(n)} = C \cdot u^{(n)},\ C - const..$

Применяя правила дифференцирования произведения и суммы, получим: $y = u \cdot v$

$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$y'' = u'' \cdot v + 2u' \cdot v' + u \cdot v''$

$y''' = u''' \cdot v + 3u'' \cdot v' + 3u' \cdot v'' + u \cdot v'''$

Продолжая процесс дифференцирования, придем к следующей формуле:

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)} \cdot v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}u^{(n-2)} \cdot v'' + ... + \frac{n(n-1)...(m-k+1)}{1 \cdot 2... \cdot k}u^{(n-k)} \cdot v^{(k)} + ... + u \cdot v^{(n)}$$

Эта формула называется формулой Лейбница.

Пример 1. $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$. Найти $y^{(100)}$.

Решение. Преобразуем данное выражение:

$$y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} = \frac{2-1+x}{\sqrt{1-x}} = \frac{2}{\sqrt{1-x}} - \frac{1-x}{\sqrt{1-x}} = 2(1-x)^{-\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$y^{(100)} = \left[2(1-x)^{-\frac{1}{2}}\right]^{(100)} - \left[(1-x)^{\frac{1}{2}}\right]^{(100)} = \frac{199!!}{2^{99}}(1-x)^{-\frac{201}{2}} + \frac{197!!}{2^{100}} \cdot (1-x)^{-\frac{199}{2}} = \frac{197!!}{2^{100}} \cdot \frac{399-x}{(1-x)^{100,5}}.$$

Замечание. Решение данной задачи было получено по формуле, которая дана в теоретической части: $(x^m)^{(n)} = m(m-1).......(m-n+1)x^{m-n}$.

Пример 2. $y = x \cdot \mathrm{sh}x$. Найти $y^{(100)}$.

Решение. По формуле Лейбница, полагая $x = u,\ \mathrm{sh}x = v$, получим:

$$y^{(100)} = (x \cdot \mathrm{sh}x)^{(100)} = \sum_{л=0}^{100} C_{100}^k (x)^{(k)} (\mathrm{sh}x)^{(100-k)} = C_{100}^0 x \cdot \mathrm{sh}x + C_{100}^1 \mathrm{ch}x = x \cdot \mathrm{sh}x + 100\mathrm{sh}x.$$

Пример 3. $y = u^2$. Найти $y^{(10)}$.

Решение. Представляем $y = u^2 = u \cdot u$ и применим формулу Лейбница:

$$y^{(10)} = \left(u^2\right)^{(10)} = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i u^{(i)} \cdot u^{(10-i)} = 2\sum_{i==0}^{4} C_{10}^i u^{(i)} \cdot u^{(10-i)} = 2\sum_{i=0}^{4} C_{10}^i u^{(i)} \cdot u^{(10-i)} + C_{10}^5 \left[u^{(5)}\right]^2 =$$

$$= 2u \cdot u^{(10)} + 20u' \cdot u^{(9)} + 90u'' \cdot u^8 + 240u''' \cdot u^{(7)} + 420u^{(4)} \cdot u^{(6)} + 252\left[u^{(5)}\right]^2$$

Пример 4. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$. Найти $y^{(n)}$.

Решение. Преобразуем y:

$$y=\left(\sin^2 x\right)^2+\left(\cos^2 x\right)^2=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}=$$

$$=\frac{2+2\cos^2 2x}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$$ и по формуле $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$,

$$y^{(n)}=4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{\pi n}{2}\right),\ n\geq 1.$$

Пример 5. $y=\sin^3 x$. Найти $y^{(n)}$.

Решение. Преобразуем y к следующему виду: $y=\sin^3 x=\sin^2 x\sin x=\frac{1-\cos 2x}{2}\sin x=$

$$=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}(\cos 2x\sin x)=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\sin 3x+\sin(-x))\right)=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x,$$ и по формуле

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right),\quad y^{(n)}=\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n\pi}{3}\right).$$

Пример 6. $y=\frac{1}{x^2-3x+2}$. Найти $y^{(n)}$.

Решение. Преобразуем y: $y=\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}=(x-2)^{-1}-(x-1)^{-1}$

и по формуле $\left(x^m\right)^{(n)}=m(m-1)......(m-n+1)x^{m-n}$ получаем

$$y^{(n)}=(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{(n+1)}}\right)$$

Пример 7. $u=e^x, v=x^2$. Найти $(u\cdot v)^{(20)}$.

Решение. По формуле Лейбница:

$$(u\cdot v)^{(20)}=\left(e^x\cdot x^2\right)^{(20)}=\left(e^x\right)^{(20)}x^2+20\left(e^x\right)^{(19)}\left(x^2\right)'+\frac{20\cdot 19}{1\cdot 2}\left(e^x\right)^{(18)}\left(x^2\right)''+...+e^x\left(x^2\right)^{(20)}=$$

$$=e^x\cdot x^2+20e^x\cdot 2x+190e^x\cdot 2=e^x\left(x^2+40x+380\right).$$

Все следующие слагаемые равны нулю, т.к. все высшие производные от функции x^2, начиная с третьей, тождественно равны нулю, а производная любого порядка от e^x есть e^x.

Пример 8. $u=e^{2x},\quad v=x^3+4x^2+2$. Найти $(u\cdot v)^{(10)}$.

Решение. Все высшие производные от функции $v=x^3+4x^2+2$, начиная с четвертой, тождественно равны нулю и поэтому в решении данного примера будет всего четыре слагаемых:

$$\left[e^{2x}\left(x^3+4x^2+2\right)\right]^{(10)} = 2^{10}\cdot e^{2x}\left(x^3+4x^2+2\right)+10\cdot 2^9\cdot e^{2x}\left(3x^2+8x\right)+\frac{10\cdot 9}{1\cdot 2}\cdot 2^8\cdot e^{2x}\left(6x+8\right)+$$
$$+\frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 2^7\cdot e^{2x}\cdot 6 = 2^7\cdot e^{2x}\left(8x^3+152x^2+860x+1456\right).$$

Пример 9. $y=u\cdot v=\cos 6x\cdot x^3$. Найти $y^{(12)}$.

Решение. Все высшие производные от функции $v=x^3$, начиная с четвертой, также как и в примере 8, равны нулю.

Следовательно,

$$y^{(12)}=(\cos 6x)^{(12)}\cdot x^3+12(\cos 6x)^{(11)}\cdot 3x^2+\frac{12\cdot 11}{1\cdot 2}(\cos 6x)^{(10)}\cdot 6x+6\cdot\frac{12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3}(\cos 6x)^{(9)}=$$
$$=x^3\cos(6x+6\pi)+36x^2\cos\left(6x+\frac{11\pi}{2}\right)+66\cdot 6x\cos(6x+5\pi)+1320\cos\left(6x+\frac{9\pi}{2}\right)=$$
$$=x^3\cos(6x+6\pi)+36x^2\cos\left(6x+\frac{11\pi}{2}\right)+396x\cos(6x+5\pi)+1320\cos\left(6x+\frac{9\pi}{2}\right)=$$
$$=x^3\cos 6x+36x^2\sin 6x-396x\cos 6x-1320\sin 6x.$$

Формулы производных *n*-го порядка для элементарных функций :

1. $y=x^k, y^{(n)}=\left(x^k\right)^{(n)}=k(k-1)(k-2)(k-3)\ldots(k-n+1)x^{k-n}$.
2. $y=e^{kx}, y^{(n)}=\left(e^{kx}\right)^{(n)}=k^n e^{kx}$.
3. $y=a^x, y^{(n)}=\left(a^x\right)^{(n)}=a^x\ln^n a$.
4. $y=\ln x, y^{(n)}=(\ln x)^{(n)}=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$.
5. $y=\sin x, y^{(n)}=(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right)$.
6. $y=\cos x, y^{(n)}=(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right)$.

9. Производные неявной функции

Рассматривая функцию, заданную аналитически, мы предполагали, что в левой части равенства, определяющего функцию, стоит только y, а в правой – выражение, зависящее от x (Например, $y=2x^2+1, y=\sin x, y=\sqrt{x+1}, y=\lg\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ и т.д.) Такие функции называются *явными.* Но и уравнение, связывающее две переменные, не разрешенные относительно какой-нибудь из них, может определять одну из этих переменных как функцию другой.

Например, в уравнении прямой $2x+3y=6$ ординату y можно рассматривать как функцию абсциссы x, определенную на всей числовой оси. Т.е. каждому значению x соответствует одно значение y, находимое из уравнения прямой. Эта функция задана в *неявном виде.* Чтобы перейти к ее явному заданию, разрешаем уравнение относительно y и получаем $y=2-\frac{2}{3}x$.

Неявной функцией y независимой переменной x называется функция, значения которой находятся из уравнения, связывающего x и y и не разрешенного относительно y.

Чтобы перейти к явному заданию функции, нужно разрешить данное уравнение относительно y. Такой переход не всегда легок $\left(y^3-3xy+x^3=0\right)$, а иногда и вовсе невозможен $\left(y+2^y x=1\right)$.

Если y есть неявная функция от x, т.е. задана уравнением $f(x,y)=0$, не разрешенным относительно y, то для нахождения производной $\frac{dy}{dx}$ нужно продифференцировать по x обе части равенства, помня, что y есть функция от x, и затем разрешить полученное равенство относительно искомой производной. Она будет зависеть от x и y, т.е. $\frac{dy}{dx}=\varphi(x,y)$.

Вторую производную $\frac{d^2y}{dx^2}$ от неявной функции получим, дифференцируя функцию $\varphi(x,y)$ по переменной x и помня при этом, что y есть функция от x:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\varphi(x,y)}{dx}=F\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right).$$

Заменяя $\frac{dy}{dx}$ через $\varphi(x,y)$, получим выражение второй производной через x и y:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=F[x,y,\varphi(x,y)]=\psi(x,y)$$

Примеры. Найти производные указанного порядка для неявных функций:

1. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \frac{dy}{dx}-?$

2. $x^y=y^x, \frac{dx}{dy}-?$.

3. $y = x + \ln y,\ y'' - ?$

Решение.

1) Дифференцируем по x обе части равенства, где y есть функция от x, получим

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2yy'}{b^2} = 0.$$

Откуда найдем

$$y' = \frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

Ответ. $y' = \dfrac{b^2 x}{a^2 y}$.

2) Логарифмируем обе части данного уравнения (по основанию e), затем дифференцируем по y, рассматривая x как функцию y (т.к. необходимо найти $\dfrac{dx}{dy}$):

$$y \ln x = x \ln y;$$

$$y' \ln x + y(\ln x)' = x' \ln y + x(\ln y)';$$

$$1 \cdot \ln x + y\frac{x'}{x} = x' \ln y + x\frac{1}{y}.$$

Откуда найдем:

$$x'\left(\frac{y}{x} - \ln y\right) = \frac{x}{y} - \ln x;$$

$$x' = \frac{dx}{dy} = \frac{x(x - y\ln x)}{y(y - x\ln y)}.$$

Ответ: $x' = \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x(x - y\ln x)}{y(y - x\ln y)}$.

3) $y = x + \ln y;\ y' = x' + (\ln y)';\ y' = 1 + \dfrac{y'}{y} \Rightarrow y' = \dfrac{y}{y-1}$. Дифференцируя последнее равенство по x, определим y'':

$$y'' = \frac{y'(y-1) - y(y-1)'}{(y-1)^2} = \frac{y'(y-1) - y'y}{(y-1)^2} = \frac{y'y - y' - y'y}{(y-1)^2} = -\frac{y'}{(y-1)^2}.$$

Подставляя вместо y' его значение $\left(y' = \dfrac{y}{y-1}\right)$, получим

$$y'' = -\frac{1}{(y-1)^2} \cdot \frac{y}{y-1} = -\frac{y}{(y-1)^3}.$$

Ответ. $y'' = -\dfrac{y}{(y-1)^3}$.

10. Производные от функции, заданной параметрически

Если функция y от независимой переменной x задана через вспомогательную переменную (параметр) t:

$$x = f(t), \; y = \varphi(t),$$

то производные от y по x определяются формулами:

$$y'' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \; y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}; \; y''' = \frac{dy''}{dxdt} = \frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}};...$$

Примеры. Найти указанные производные функций, заданных параметрически:

1) $\begin{cases} x = 8t^2 - 4 \\ y = 10t^9 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = e^{5t} \\ y = \sin t \end{cases}$

Решение.

1) $\dfrac{dx}{dt} = \left(8t^2 - 4\right)' = 16t; \; \dfrac{dy}{dt} = \left(10t^9\right)' = 90t^8; \; \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{90t^8}{16t} = \dfrac{45t^8}{8}$.

Ответ. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{45t^8}{8}$.

2) $\dfrac{dx}{dt} = \left(e^{5t}\right)' = 5e^{5t}; \; \dfrac{dy}{dt} = (\sin t)' = \cos t; \; \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\cos t}{5e^{5t}}$.

Ответ. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos t}{5e^{5t}}$.

11. Правило Лопиталя

Рассмотрим отношение

$$\frac{f(x)}{g(x)},$$

где функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности U_a точки a, исключая, быть может, саму точку a. Может случиться, что при $x \to a$ обе функции $f(x)$ и $g(x)$ стремятся к 0 или к ∞, т.е. эти функции одновременно являются или *бесконечно малыми* или *бесконечно большими* при $x \to a$. Тогда говорят, что в точке a отношение функций $f(x)$ и $g(x)$ имеет неопределенность, соответственно,

$$\frac{0}{0} \text{ или } \frac{\infty}{\infty}. \qquad (1)$$

В этом случае, используя производные $f'(x)$ и $g'(x)$, можно сформулировать простое правило для нахождения предела отношений функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$, т.е. дать рецепт для раскрытия неопределенности вида (1). Это правило связывают с именем французского математика Лопиталя, впервые опубликовавшего его.

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в окрестности точки $x = a$, за исключением, быть может, самой точки a, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, $g(x)$ и $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности. Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ и имеет место равенство*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (1)$$

Замечание 1. Если предел справа (1) не существует, то предел слева может существовать.

Пример 1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$.

Решение. Так как $\sin x \approx x$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Однако

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

не существует.

Замечание 2. Если выражение $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ представляет неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ и функция $f'(x)$, $g'(x)$ удовлетворяют условию теоремы 1, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

При этом эти равенства надо понимать в том смысле, что если существует третий предел, то существует и второй и первый.

Теорема 2 $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$**.** *Пусть* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены и дифференцируемы в окрестности точки* $x=a$*,* $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$*,* $g(x)$ *и* $g'(x)\neq 0$ *в этой окрестности, тогда, если существует*

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то существует

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

и

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание 3. Если $a=\infty$, то замена $x=1/t$ сводит дело к $a=0$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(1/t)}{g(1/t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\left(f(1/t)\right)'}{\left(g(1/t)\right)'}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(1/t)\left(-1/t^2\right)}{g'(1/t)\left(-1/t^2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пример 2. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{x^3-1}\right)$.

Решение. Функции $f(x)=x^2-1$ и $g(x)=x^3-1$ бесконечны малы при $x\to 1$. Рассмотрим отношение $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\dfrac{2x}{3x^2}$. Оно стремится к пределу $\dfrac{2}{3}$ при $x\to 1$. Согласно правилу Лопиталя к тому же пределу стремится $\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$.

Действительно,

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to1}\left(\frac{x+1}{x^2+x+1}\right)=\frac{2}{3}.$$

Если не только функция $f(x)$, $g(x)$, но и их производные $f'(x)$, $g'(x)$, бесконечно малы при $x\to a$, то для разыскания предела $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ можно повторно применить правило Лопиталя.

Пример 3. Найти предел $\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

Решение. Вначале убеждаемся, что предел функции нельзя найти непосредственной подстановкой, что при указанном изменении аргумента она представляет отношение двух бесконечно малых величин (случай $\frac{0}{0}$); затем применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to1}\frac{(x^3-3x+2)'}{(x^3-x^2-x+1)'}=\lim_{x\to1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}.$$

Здесь числитель и знаменатель снова бесконечно малы, применяем правило Лопиталя повторно:

$$\lim_{x\to1}\frac{(3x^2-3)'}{(3x^2-2x-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}$$

Правило Лопиталя имеет силу также и для отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ двух функций, бесконечно больших при $x\to a$ (или при $x\to\infty$).

Пример 4. Найти предел $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}$.

Решение. Функция $f(x)=\ln x$ и $g(x)=x^2$ бесконечно велики при $x\to\infty$. Отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{2x}$ при $x\to\infty$ стремится к пределу 0, т.е.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0.$$

К тому же пределу стремится и $\frac{\ln x}{x^2}$.

Неопределенность вида $(0\cdot\infty),(\infty-\infty),\ldots$

I. **Неопределенность вида** $0\cdot\infty$**,** т.е. произведения $f(x)\cdot g(x)$, где $f(x)\to 0$ и $g(x)\to\infty$.

Это выражение можно привести к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

$f(x)\cdot g(x) = f(x) : \frac{1}{g(x)} = g(x) : \frac{1}{f(x)}$ и затем применить правило Лопиталя.

Пример 5. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

Решение. При указанном изменении аргумента данный предел представляет неопределенность вида $0\cdot\infty$. Преобразуем $x\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = x : \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и находим:

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \lim_{x\to 0} x : \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \lim_{x\to 0} x' : \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)' = \lim_{x\to 0}\left[1 : \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right] = 2.$$

II. Неопределенность вида $\infty-\infty$**,** $\left(f(x)-g(x), f\to+\infty, \mathrm{g}\to+\infty \text{ при } \mathrm{x}\to a\right)$ т.е. разность двух функции, каждая из которых имеет предел $+\infty$ или $-\infty$.

Это выражение также приводится к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Легко видеть, что неопределенность вида $\infty-\infty$ можно привести к виду $\frac{0}{0}$:

$$f-g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f}\cdot\frac{1}{g}} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Пример 6. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{2}{x(e^x+1)}\right]$.

Решение. Подставив вместо x число 0, получим неопределенность вида $\infty-\infty$.

Приведем дроби к общему знаменателю, искомая величина есть $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x(e^x+1)}$, т.е. имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Так как $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+1)=2$, то $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{2}{x(e^x+1)}\right] =$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x\left(e^x+1\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x+1\right)} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{x'} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = \frac{1}{2}.$$

III. Неопределенность вида $0^0, \infty^0, 1^\infty$, т.е. функции вида $f(x)^{g(x)}$, где $\lim f(x)=0$ и $\lim g(x)=0$ или $\lim f(x)=\infty, \lim g(x)=0$, или $\lim f(x)=1,\ \lim g(x)=\infty$.

Здесь сначала ищем предел логарифма данной функции. Во всех трех случаях получаем неопределенность вида $0\cdot\infty$.

Пример 7. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

Решение. Здесь неопределенность типа 0^0. Полагая $y=x^x$, имеем $\ln y = x\cdot\ln x$. Далее,

$$\lim_{x\to 0}\ \ln y = \lim_{x\to 0}\left(\ln x : \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} : \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = 0.$$

Отсюда $\lim\limits_{x\to 0} y = 1$.

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Здесь неопределенность типа ∞^0. Полагая $y=(1+2x)^{\frac{1}{x}}$, имеем

$\ln y = \dfrac{1}{x}\ln(1+2x)$.

Тогда,

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1=2x)}{x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$$

Применим правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(1+2x)'}{x'} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{1+2x} = 0$.

Значит, $\lim\limits_{x\to\infty} y = 1$.

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x}$.

Решение. Здесь неопределенность 1^∞. Полагаем $y=(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x}$. Тогда имеем $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln y$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}2x\cdot\ln\mathrm{tg}x = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\ln\mathrm{tg}x)'}{(\mathrm{ctg}2x)'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\sin x\cdot\cos x} : -\frac{2}{\sin^2 2x}\right) = -1.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{tg}2x} = e^{-1}$.

Вычисление пределов с помощью правила Лопиталя

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(e^{x-1}-1\right)}{\ln x}$.

Решение. Подставив вместо x число 1, получим неопределенность $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, т.е.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(e^{x-1}-1\right)}{\ln x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}.$$

Для ее раскрытия воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sin\left(e^{x-1}-1\right)\right)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{x-1}\cdot\cos\left(e^{x-1}-1\right)}{\frac{1}{x}}=1.$$

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x+x^2\right)+\ln\left(1-x+x^2\right)}{1-\cos x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x+x^2\right)+\ln\left(1-x+x^2\right)}{1-\cos x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[\ln\left(1+x+x^2\right)+\ln\left(1-x+x^2\right)\right]'}{(1-\cos x)'}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1+2x}{1+x+x^2}+\dfrac{2x-1}{1-x+x^2}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\left(2x^2+1\right)}{\left(x^4+x^2+1\right)\sin x}=2\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+1}{x^4+x^2+1}=2.$$

Пример 3. $\lim\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\{\infty-\infty\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x\cdot\left(e^x-1\right)}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^x-x-1\right)'}{\left(x\cdot\left(e^x-1\right)\right)'}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^x+xe^x-1}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Применим повторно правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(e^x+x\cdot e^x-1\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\frac{1}{2}.$$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{cth}x}=\left\{1^\infty\right\}$

Решение. Преобразуем исходную функцию к виду: $\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{cth}x}=e^{\left(\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)\right)\cdot\left(\operatorname{th}x^{-1}\right)}$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{cth}x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\left(\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)\right)\cdot\frac{1}{thx}}=\left\{e^{\left\{\frac{0}{0}\right\}}\right\}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)}{\operatorname{th}x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left[\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)\right]'}{[\operatorname{th}x]'}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2}{1+e^x}\cdot e^x\cdot\frac{1}{2}}{\operatorname{ch}^{-2}x}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

12.Формула Тейлора (Маклорена).

Важную роль в математическом анализе играет формула Тейлора, позволяющая записать любую функцию, имеющую достаточное число производных, в виде суммы многочлена (полинома) и остатка (или «остаточного числа»), обычно оказывающаяся малым по величине. Для большинства важных функций, встречающихся в анализе, этот остаток может быть сделан сколь угодно малым (для чего только надо выбрать степень многочлена достаточно большой).

Теорема Тейлора. *Функция* $f(x)$, *дифференцируемая* $n+1$ *раз в некотором интервале, содержащем точку* a, *может быть представлена в виде суммы многочлена* $n-й$ *степени и остаточного члена* R_n:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n, \qquad (1)$$

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$ - *остаточный член в форме Лагранжа*,

где c - некоторое среднее значение между a и x,

$$c=a+\theta(x-a),\quad 0<\theta<1.$$

Формула (1) называют формулой Тейлора.

Формула Тейлора позволяет приближено представить (аппроксимировать) произвольную функцию $f(x)$ в виде многочлена

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (2)$$

(*называемого многочленом Тейлора*) и вместе с тем позволяет оценить возникающую при этом погрешность R_n, которая во многих случаях может быть сделана как угодно малой. Поэтому она является одной из важнейших формул математического анализа, которая широко применяется и как тонкий инструмент теоретического исследования и как средство решения многих практических задач. Частный, простейший вид формулы Тейлора при $a=0$ принято называть ***формулой Маклорена:***

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(x-a)+\frac{f''(0)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(0)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-a)^n+R_n;$$

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (3)$$

Она дает разложение функции по степеням самой независимой переменной.

Однако для многих функций эта простейшая формула Тейлора неприменима, т.к. при $x=0$ многие функции или их производные не существуют (например: $\ln x, \sqrt{x}, \mathrm{ctg}x, \frac{1}{x}$).

Пример 1. Пусть $f(x)=e^x$. Все производные этой функции равны e^x. Нам известно значении в точке $x=0$ (именно, $e^0=1$). В многочлене Тейлора:

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

надо положить $a=0, f(a)=f'(a)=.....=f^{(n)}(a)=1$, и он принимает вид

$$1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+...+\frac{1}{n!}x^n \quad (4)$$

Заменив значение e^x значением многочлена (4), мы допустим некоторую ошибку R_n, она равна

$$R_n=e^x-[1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}]$$

Так как $f^{(n+1)}=e^x$, то ошибку R_n согласно формуле (3) можно представить в таком виде:

$$R_n=\frac{e^c}{(\mathrm{n}+1)!}x^{n+1} \quad (5)$$

Число c лежит где-то между нулем и x. Значит, e^c лежит между $e^0=1$ и e. Этого достаточно, чтобы оценить ошибку.

Например, надо вычислить значение e^x при $x=\frac{1}{2}$, т.е. извлечь квадратный корень из *e*. Так как число *e* заключено между 2 и 3, то $e^{1/2}$ меньше чем 2, а e^c и подавно. Из (5) следует, что $|R_n|<\frac{2}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, т.е. $|R_n|<\frac{1}{(n+1)!\cdot 2^n}$ (6)

С ростом *n* величина $\frac{1}{(n+1)!\cdot 2^n}$ (предельная погрешность) стремится к нулю, а ошибка R_n тем более. Значит, многочлен (4), который теперь принимает значение

$$1+\frac{1}{1!\cdot 2}+\frac{1}{2!\cdot 2^2}+\frac{1}{3!\cdot 2^3}+...+\frac{1}{n!\cdot 2^n} \quad (7)$$

пригоден для вычисления $\sqrt{e}$ с любой точностью.

Определим теперь, сколько членов должно иметь сумма (7), чтобы обеспечить точность, скажем, до четвертого десятичного знака (т.е. до $\pm 0{,}5\cdot 10^{-4}$). Для этого вычисляем предельную погрешность $\frac{1}{(n+1)!\cdot 2^n}$ при $n=1,2,3$ и т.д. (Начиная со второй строки нижеследующей, мы прибегаем к последовательному делению на четные числа $6,8,10,\ldots$, основываясь на тождестве $\frac{1}{(n+1)!\cdot 2^n}=\frac{1}{2(n+1)}\cdot\frac{1}{n!\cdot 2^{n-1}}$):

$$\frac{1}{2!\cdot 2}=\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{3!\cdot 2^2}=\frac{1}{2!\cdot 2}:6=\frac{1}{24},$$

$$\frac{1}{4!\cdot 2^3}=\frac{1}{3!\cdot 2^2}:8=\frac{1}{192},$$

$$\frac{1}{5!\cdot 2^4}=\frac{1}{4!\cdot 2^3}:10=\frac{1}{1920},$$

$$\frac{1}{6!\cdot 2^5}=\frac{1}{5!\cdot 2^4}:12=\frac{1}{23040}.$$

Здесь можно остановиться, так как $\frac{1}{23040}<0{,}5\cdot 10^{-4}$.

Следовательно, для обеспечения точности $0{,}5\cdot 10^{-4}$ достаточно, чтобы сумма (7) имела шесть членов. Находим:

$$1 \qquad =1{,}00000$$

$$\frac{1}{1!\cdot 2} \qquad =0{,}50000,$$

$$\frac{1}{2!\cdot 2^2}=\frac{1}{1!\cdot 2}:4 \qquad =0{,}12500,$$

$$\frac{1}{3!\cdot 2^3}=\frac{1}{2!\cdot 2^2}:6 \qquad =0{,}02083,$$

$$\frac{1}{4!\cdot 2^4}=\frac{1}{3!\cdot 2^3}:8 \qquad =0{,}00260,$$

$$\frac{1}{5!\cdot 2^5}=\frac{1}{4!\cdot 2^4}:10 \qquad =0{,}00026$$

$$1{,}64869$$

В итоге получаем:

$$\sqrt{e} = 1{,}6487 .$$

Таким же образом найдем, что для обеспечения точности до $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ сумма (7) должна иметь 10 членов, так как

$$\left|R_9\right| < \frac{1}{10! \cdot 2^9} \approx 0{,}55 \cdot 10^{-9} < 0{,}5 \cdot 10^{-8} .$$

Вычисление дает:

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{1! \cdot 2} + \frac{1}{2! \cdot 2^2} + \ldots + \frac{1}{9! \cdot 2^9} = 1{,}64872127 .$$

Взяв 15 членов, можно вычислить $e^{\frac{1}{2}}$ с точностью до $0{,}5 \cdot 10^{-16}$ и т.д. Точность результата быстро возрастает с ростом числа членов.

Например, положим $x = 1$. Тогда многочлен (5), принимающий вид $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, дает приближенное значение числа e.

Ошибка согласно (5) равна

$$R_n = \frac{\ell^{\xi}}{(\mathrm{n}+1)!} .$$

Число e^{ξ} теперь заключено между e^0 и e^1, т.е. между 1 и e, а так как $e < 3$, то

$$\left|R_n\right| < \frac{3}{(n+1)!}$$

Ошибка быстро стремится к нулю с ростом n. Но теперь для обеспечения точности до $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ надо взять девять членов (вместо шести), ибо предельная погрешность $\frac{3}{(n+1)!}$ лишь при $n = 8$ становится меньше $0{,}5 \cdot 10^{-4}$. Вычисление дает:

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{8!} = 2{,}7183 .$$

Если надо обеспечить точность до $0{,}5 \cdot 10^{-8}$, придется взять 13 членов (вместо 10); вычисление даст:

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{12!} = 2{,}71828183 .$$

Из формулы Маклорена следуют следующие основные разложения в ряд:

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2 2!}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + 0(x^n), x \to 0 .$

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + 0(x^{2n}), x \to 0 .$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + 0(x^{2n+1}), x \to 0$.

4. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots. + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + 0(x^n)$

5. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + 0(x^n), x \to 0$

Пример 2. Разложить в ряд Маклорена до $0(x^n)$ $y = \ln(1+x)$.

Примем точку $x = 0$ за начальную. Область определения функции определяется из условия: $1 + x > 0 \Rightarrow x > -1$.

Последовательные производные выражаются следующим образом:

$f'(x) = \frac{1}{x+1}$, $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3}$, $f^{IV}(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \ldots f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$,

так, что $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -\frac{1}{2}$, $f'''(0) = \frac{1}{3}, \ldots,$ $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

Согласно формуле Маклорена, получаем, что $\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$.

Так как $f^{(n+1)}[\ln(1+x)] = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$, то погрешность R_n последнего равенства можно представить в виде

$$R_n = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1},$$

где ξ лежит где-то между нулем и x.

Вычислим, например, значение $\ln(1+x)$ при $x = -0{,}1$. Получаем приближенное равенство

$$\ln 0{,}9 \approx -0{,}1 - \frac{1}{2} \cdot 0{,}1^2 - \frac{1}{3}0{,}1^3 - \ldots - \frac{1}{n} \cdot 0{,}1^n.$$

Его погрешность равна

$$R_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{0{,}1}{1+\xi}\right)^{n+1}$$

Так как ξ лежит между нулем и $-0{,}1$, то $1+\xi > 0{,}9$, значит $|R_n| < \frac{1}{n+1}\left(\frac{0.1}{0.9}\right)^{n+1}$, т.е.

$$|R_n| < \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}.$$

Предельная погрешность, очевидно, стремится к нулю с ростом n, т.е. формула

$\ln 0{,}9 \approx -0{,}1 - \frac{1}{2}\cdot 0{,}1^2 - \frac{1}{3}\cdot 0{,}1^3 - ... - \frac{1}{n}\cdot 0.1^n$ способна дать $\ln 0{,}9$ с любой точностью.

Так, для обеспечения точности до $0{,}5\cdot 10^{-4}$ надо взять $n=4$ и мы получим:

$$\ln 0{,}9 \approx -\left[0{,}1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}01 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}001 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}0001\right] \approx -0{,}1054.$$

13. Исследование функции

Для общего исследования функции и построения графика обычно придерживаются следующего плана:

1. Область определения функции, решения вопроса о четности, нечетности периодичности функции.
2. Точки разрыва функции и интервалы непрерывности.
3. Нахождение асимптот графика (вертикальных и наклонных).
4. Экстремумы функции и интервалы монотонности.
5. Интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика.
6. Нахождения точек пересечения графика с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.
7. Несколько контрольных точек для более точного построения графика.

Рассмотрим более подробно каждый из вышеперечисленных пунктов и дадим алгоритм решения каждого пункта.

1.Область определения функции.

Четность: Функция $y = f(x)$ *называется четной*, если $f(-x) = f(x)$ для всех x из области определения функции.

График четной функции симметричен относительно оси ординат (Oy)

Нечетность: Функция $y = f(x)$ *называется нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$ для всех x из области определения функции.

Примеры четных функций: $y = x^2, y = \cos x, y = \frac{\sin x}{x}, y = |x|$.

Примеры нечетных функций: $y = x, y = x^3, y = \mathrm{tg} x$.

Рассмотрим примеры на определение четности или нечетности функции.

а) $y=\frac{\sin x}{x}$. Изменим знак аргумента: $y(-x)=\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{-\sin x}{-x}=\frac{\sin x}{x}=y(x)$. Отсюда следует, что при изменении знака аргумента знак функции не изменился. Следовательно, функция четная.

б) $y=x^3$.

$y(-x)=(-x)^3=-x^3=-y(x)\Rightarrow$ функция нечетная.

Периодичность функции: Функция $y=f(x)$ *называется периодической*, если существует такое постоянное число $T\neq 0$, что $f(x\pm T)=f(x)$ в области определения функции. При этом наименьшее из положительных чисел T, удовлетворяющих данному свойству, называется периодом.

Примеры периодических функций: $y=\sin x, y=\cos x, y=\mathrm{tg}x$ и $y=\mathrm{ctg}x$.

Для $y=\sin x$ и $y=\cos x$ период $T=2\pi$, для $y=\mathrm{tg}x$ и $y=\mathrm{ctg}x$ период $T=\pi$.

График периодической функции достаточно построить на отрезке длины T, далее эта кривая повторяется на всю область существования функции.

2.Точки разрыва функции и интервалы непрерывности.

Условно говоря, функцию можно считать непрерывной в точке, если в этой точке отсутствует разрыв функции. Дадим определение разрыва функции.

Функция имеем конечный предел справа $f(x_0+0)$ и конечный предел слева $f(x_0-0)$, эти пределы равны, но значение функции в точке $x=x_0$ не существует (эта точка на кривой $y=f(x)$ «выколота»). Тогда говорят, что функция в точке $x=x_0$ имеет устранимый разрыв (можно эту точку в кривую «вставить», рис.4).

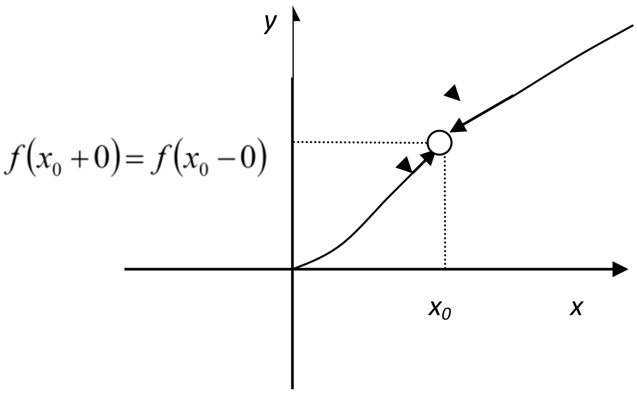


рис. 4

Если же конечные пределы функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ и справа, и слева существуют, но они не равны, то функция в этой точке делает «скачок». Точка $x = x_0$ в этом случае *называется точкой неустранимого разрыва I рода* для данной функции (рис. 5)

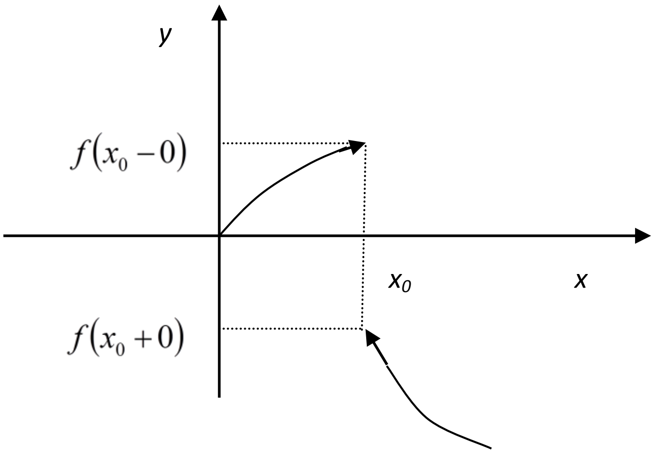


рис. 5

Если же функция $y = f(x)$ не имеет конечных пределов ни справа, ни слева (а может быть только с одной стороны) в точке $x = x_0$, то точка $x = x_0$ *называется точкой разрыва II рода* (рис. 6).

Определение: Точка $x = x_0$ *является точкой непрерывности функции* $y = f(x)$, ес-

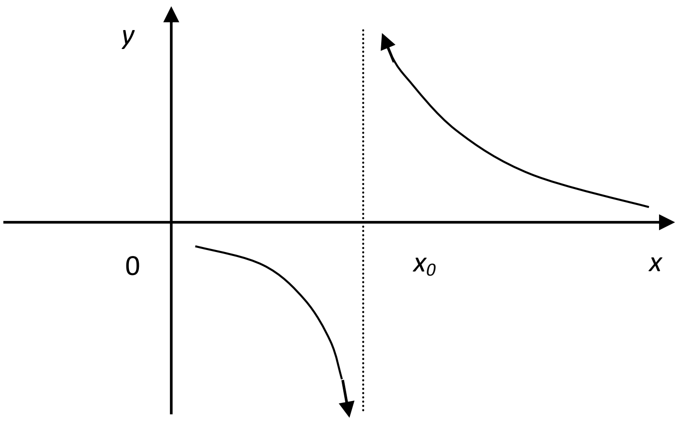


рис. 6

ли существуют конечные пределы справа и слева, и эти пределы равны значению функции в этой точке, т.е. $f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x)$.

Если же хотя бы одно равенство нарушено, тогда точка $x = x_0$ является точкой разрыва функции.

Определение: Функция $y = f(x)$ *называется непрерывной на отрезке* $[a; в]$, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка.

3.Асимптоты графика (вертикальные и наклонные).

Определение. *Асимптотой кривой называется* такая прямая, к которой неограниченно приближается точка кривой при неограниченном удалении ее от начала координат.

Кривая может приближаться к своей асимптоте теми же способами, как и переменная к своему пределу: оставаясь с одной стороны от асимптоты или с разных сторон, бесчисленное множество раз пересекая асимптоту и переходя с одной стороны на другую.

Если при $x = a$ кривая $y = f(x)$ имеет бесконечный разрыв, т.е. если при $x \to a - 0$ или $x \to a + 0$ функция $f(x)$ стремится к бесконечности (того или иного знака), то прямая $x = a$ *является ее вертикальной асимптотой*. Например, для гиперболы $y = \frac{1}{x}$ прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой (рис.7).

Для отыскания вертикальных асимптот следует найти те значения *x*, при которых функция обращается в бесконечность (терпит бесконечный разрыв). Помимо вертикальных существует еще и наклонные асимптоты.

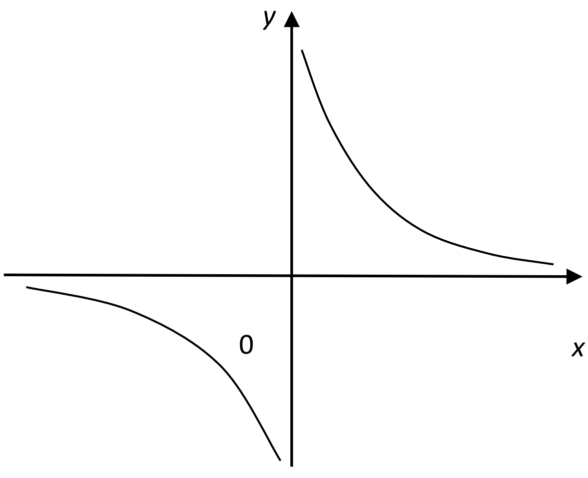


рис. 7

Для определения наклонной асимптоты $y = kx + b$, числа k (угловой коэффициент прямой) и b находят из следующих формул: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - kx\right)$.

Примечание: Следует отдельно рассмотреть случаи, когда $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Частным случаем наклонной асимптоты при $k = 0$ будет горизонтальная асимптота.

Пример: $y=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$. Найти асимптоты графика данной функции.

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1,\ \lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}=-1$$

Следовательно, $y=1$ – асимптота графика функции при $x\to+\infty$; $y=-1$ – при $x\to-\infty$.

4.Экстремумы функции и интервалы монотонности.

Интервалы монотонности – интервалы возрастания и убывания функции.

Определение. Функция $y=f(x)$ *называется возрастающей* на сегменте $[a;в]$, если для любого $x_1,x_2\in[a,в]$ таких, что $x_1<x_2$ выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$.

Определение. Функция $y=f(x)$ *называется убывающей* на сегменте $[a;в]$, если для любого $x_1,x_2\in[a,в]$ таких, что $x_1<x_2$ выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$.

Критерий возрастания функции: Для того чтобы имеющая конечную или бесконечную на промежутке x производную функция f возрастала на нем необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $f'(x)\ge 0$.

2) $f'(x)\ne 0$ ни на каком сегменте $[\alpha;\beta]$ составляющем часть промежутка x.

Критерий убывания функции: Для того чтобы имеющая конечную или бесконечную на промежутке X производную функция f убывала на промежутке X необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $f'(x)\le 0$.

2) $f'(\ne 0)$ при $x\in X$, где $\bigcup_{i=1}^{n}[\lambda_i,\beta_i]=X$.

Экстремумы функций – локальный максимум (минимум).

Определение. Пусть функция f имеет в точке C локальный максимум (минимум), если найдется такая окрестность точки C, в пределах которой значение $f(C)$ является наибольшим (наименьшим) среди всех других значений этой функции.

Необходимое условие экстремума. Если функция дифференцируема в точке C и имеет в этой точке экстремум, то $f'(C)=0$.

Корни уравнения $f'(x)=0$ называются стационарными точками функции $f(x)$.

Замечание. К точкам, подозрительным на экстремум, следует отнести и такие, в которых производная функции f не существует.

Стационарные точки и точки, в которых производная не существует, называются критическими точками этой функции.

Достаточные условия экстремума:

Первое правило: Пусть функция f дифференцируема всюду в некоторой окрестности точки C и непрерывна в точке C. Тогда, если в пределах указанной окрестности производная f' положительна (отрицательна) слева от точки C и отрицательна (положительна) справа от точки C, то функция f имеет в точке C локальный максимум (минимум). Если же f' имеет один и тот же знак слева и справа от точки C, то экстремума в точке нет.

Второе правило: Пусть функция f имеет в данной точке возможного экстремума конечную производную второго порядка. Тогда функция f имеет в точке C максимум, если $f''(C)<0$, и минимум, если $f''(C)>0$.

Третье правило: Пусть n– некоторое целое положительное число и пусть функция $y=f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки $x=C$ производную $(n-1)$-ого порядка, а в самой точке $x=C$– производную порядка *n*. Пусть в точке $x=C$ выполняются следующие соотношения: $f'(C)=f''(C)=.....=f^{(n-1)}(C)=0, f^{(n)}(C)\neq 0$. Тогда, если n – четное число, то функция $y=f(x)$ имеет локальный экстремум в точке C, а именно: максимум, если $f^{(n)}(C)<0$, и минимум, если $f^{(n)}(C)>0$.

5. Интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика.

Определение. График дифференцируемой функции *называется выпуклым* в интервале $[a,в]$, если он расположен ниже любой своей касательной в этом интервале (рис.9).

Определение. График дифференцируемой функции *называется вогнутым* в интервале $[a,в]$, если он расположен выше любой своей касательной в этом интервале (рис. 8).

Определение. Точка $M_0(x_0,y_0)$, лежащая на графике и отделяющая выпуклую часть графика от вогнутой, *называется точкой перегиба* функции $y=f(x)$ (рис.10).

Если функция $y = f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ во всех точках интервала $[a,в]$ и если во всех точках этого интервала $f''(x) < 0$, то график функции в интервале $[a,в]$ *выпуклый*, если же $f''(x) > 0$, то график функции *вогнутый* в этом интервале.

Замечание. Точки перегиба следует искать среди тех точек, в которых вторая производная $y'' = f''(x) = 0$.

Если слева от такой точки и справа от нее $f''(x)$ имеет разные знаки, то найденная точка будет точкой перегиба.

Примечание. В литературе (у некоторых авторов) функция, которую мы назвали выпуклой называется выпуклой вверх, а функцию, которую мы назвали вогнутой называется выпуклой вниз.

6. Нахождение точек пересечения графика с осями координат.

Если дана функция $y = f(x)$, то для того, чтобы найти точку пересечения с осями Oy, надо положить $x = 0$ и найти $f(0) = y_0$ и точка $(O; y_0)$ – точка пересечения с осью Oy.

А для того, чтобы найти точку или точки пересечения с осью абсцисс Ox надо положить $y = 0$ и найти решение $f(x) = 0$.

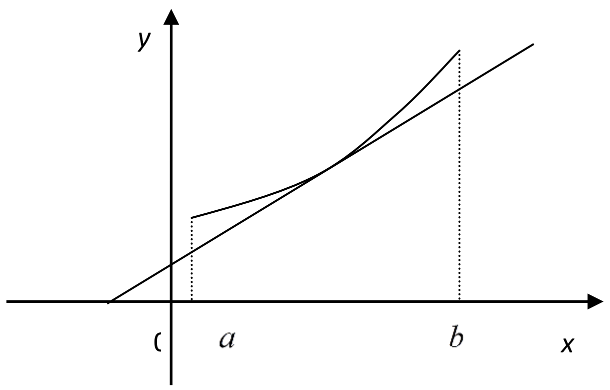


рис. 8

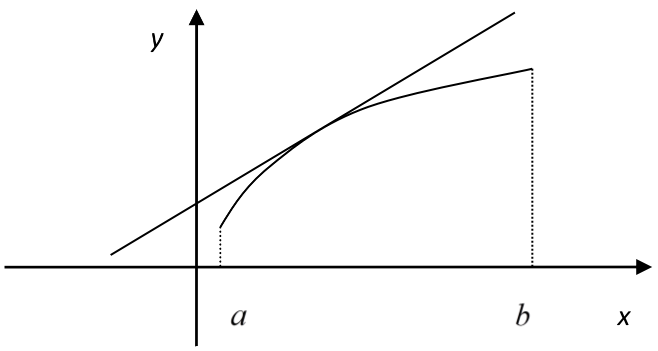
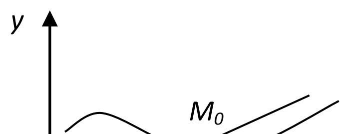


рис. 9



Пример. Найти точки пересечения функции $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$ с осями координат.

Решение. При $x = 0$, $y = \dfrac{2 \cdot 0}{1+0^2} = 0$, при $y = 0$, $\dfrac{2x}{1+x^2} = 0 \Rightarrow x = 0$. Отсюда следует, что начало координат $(0{,}0)$ – единственная точка, в которой график функции пересекает оси координат.

Исследовать функции и построить их графики

Пример 1. $y = \dfrac{4x^3 - x^4}{5}$

Решение.

1. Область определения данной функции, как и всякого многочлена, является вся числовая ось. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

2. Функция не имеет точек разрыва. Как у всякой элементарной функции, ее область непрерывности совпадает с областью определения.

3. Вертикальных асимптот график функции не имеет, так как она всюду непрерывна. $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{5} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2(4-x) = -\infty$. При $x \to -\infty$ угловой коэффициент k асимптоты также не существует. Поэтому невертикальных асимптот график функции также не имеет.

4. $y' = \dfrac{1}{5}\left(12x^2 - 4x^3\right) = \dfrac{4}{5}x^2(3-x)$, $y' = 0$ в точках $x = 0$ и $x = 3$, которые являются критическими, так как они удовлетворяют всем необходимым для этого условиям. Других критических точек нет, поскольку производная y' существует всюду.

Исследуем критические точки по знаку y' слева и справа от каждой из этих точек:

x	-1	0	1	3	10
y'	+	0	+	0	-
y	*возр.*	*нет экстр.*	*возр.*	*max.*	*убыв.*

Следовательно, $x=3$ есть точка максимума: $y_{\max}=y(3)=5{,}4$. Исследуемая функция всюду непрерывна и имеет единственную точку максимума $x=3$. Поэтому в интервале $(-\infty,3)$ она возрастает, а в интервале $(3,+\infty)$ - убывает.

5. $y''=\dfrac{12}{5}x(2-x)$ всюду существует и обращается в нуль при $x=0$ и $x=2$. Эти значения x могут быть абсциссами точек перегиба. Исследуем их, определяя знак y'' слева и справа:

x	*-1*	*0*	*1*	*2*	*10*
y''	-	*0*	+	*0*	-
y	*в.вверх*	*перегиб*	*в.вниз*	*перегиб*	*в.вверх*

Следовательно, график функции имеет две точки перегиба $(0;0)$ и $(2;3{,}2)$ (их ординаты найдены из данного уравнения).

Так как исследуемая функция непрерывна на всей числовой оси, то, согласно таблице, в интервалах $(-\infty,0)$ и $(2,+\infty)$ ее график обращен выпуклостью вверх, а в интервале $(0;2)$ он обращен выпуклостью вниз. Строим график данной функции (рис.11).

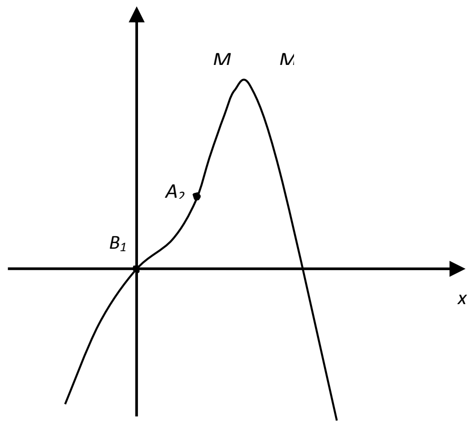


рис. 11

Пример 2. $y=\dfrac{1-x^3}{x^2}$**.**

Решение.

1. Данная функция определена на всей числовой оси, кроме точки $x=0$. Функция не является ни четной, ни нечетной, ни периодической.

2. В точке $x=0$ функция имеет бесконечный разрыв: при $x\to-0$ и при $x\to+0$ $\lim y=+\infty$. Во всех других точках числовой оси функция непрерывна.

3. Прямая $x=0$ (ось ординат) является вертикальной асимптотой графика функции, ибо при $x=0$ она имеет бесконечный разрыв.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^3}{x^3}=-1,\ b=\lim_{x\to+\infty}\left(y-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x^3}{x^2}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0.$$

Следовательно, прямая $y=-x$ есть невертикальная асимптота. При $x\to-\infty$ параметры k и b имеют те же значения, поэтому других асимптот нет.

4. $y'=-\dfrac{x^3+2}{x^3}$; $y'=0$ в точке $x=-\sqrt[3]{2}$, которая является критической; y' не существует в точке $x=0$, но эта точка не является критической, так как она есть точка разрыва. Исследуем критическую точку по знаку y' слева и справа от данной точки и от точки разрыва $x=0$:

x	$\left(-\infty;-\sqrt[3]{2}\right)$	$-\sqrt[3]{2}$	$\left(-\sqrt[3]{2};0\right)$	0	$\left(0;+\infty\right)$
y'	–	0	+	*не сущ.*	–
y	*убывает*	*min.*	*возраст.*	*не сущ.*	*убывает*

Из таблицы следует, что слева от точки минимума при $-\infty<x<-\sqrt[3]{2}, y'<0$ и функция убывает; между точкой минимума и точкой разрыва при $-\sqrt[3]{2}<x<0, y'>0$ функция возрастает; справа от точки разрыва при $0<x<+\infty$ функция убывает.

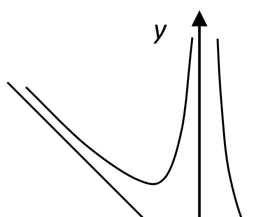
Определим значение функции в точке минимума: $y_{\min}=y\left(-\sqrt[3]{2}\right)=\dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

5. $y''=\dfrac{6}{x^4}$; $y''\neq 0$; y'' не существует при $x=0$, но это значение x не может быть абсциссой точки перегиба, так как оно является точкой разрыва. Следовательно, график функции не имеет точек перегиба.

Во всей области определения функция $y''>0$, поэтому ее график всюду вогнутый.

6. График функции пересекает ось Ox в точке $(1;0)$ и не пересекает оси Oy.

Слева от точки разрыва, при $-\infty<x<0$, $y>0$; между точкой разрыва и точкой пересечения с осью Ox, при $0<x<1$, $y>0$; справа от точки пересечения с осью Ox, при $1<x<+\infty$, $y<0$. Используя данные исследования, построим график исходной функции (рис. 12)



Пример 3. $y = e^{\frac{1}{x-1}}$

1. Область определения - вся числовая ось, кроме точки $x=1$, в которой функция терпит разрыв. Граничные значения функции:

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1; \ \lim_{x\to1-0} e^{\frac{1}{x-1}} = 0; \ \lim_{x\to1+0} e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty; \ \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1.$$

Отсюда следует, что $x=1$ есть вертикальная асимптота. Функция общего вида, непериодическая.

2. Как следует из пункта 1, в точке $x=1$ функция терпит разрыв, и она непрерывна на всей области определения, т.е. $(-\infty;1),(1,+\infty)$ интервалы непрерывности данной функции.

3. Параметры наклонной асимптоты: $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{\frac{1}{x-1}}}{x} = 0$; $b = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1$

Следовательно, имеется горизонтальная асимптота $y=1$.

4. Найдем производную функции: $y' = -\dfrac{1}{(x-1)^2} \cdot e^{\frac{1}{x-1}}$. Производная отрицательная на всей числовой оси, кроме точки $x=1$. Следовательно, функция монотонно убывает всюду, где она определена.

Находим вторую производную: $y'' = \dfrac{2x-1}{(x-4)^4} \cdot e^{\frac{1}{x-1}}$. Решаем неравенства:

а) $y'' > 0$, или $\dfrac{2x-1}{(x-1)^4} \cdot e^{\frac{1}{x-1}} > 0$, откуда $x > \dfrac{1}{2}$; $x \neq 1$;

б) $y'' < 0$, или $\dfrac{2x-1}{(x-1)^4} \cdot e^{\frac{1}{x-1}} < 0$, откуда $x < \dfrac{1}{2}$.

Приравниваем к нулю вторую производную, найдем критическую точку II рода: $x=\frac{1}{2}$.

Исследуем критическую точку по знаку y'' слева и справа от данной точки и точки разрыва:

x	$\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2};1\right)$	1	$(1;+\infty)$
y''	–	0	+	*не сущ.*	+
y	*в.вверх*	*перегиб*	*в.вниз*	*нет перег.*	*в.вниз*

Ордината точки перегиба: $y_{пер.}=e^{-2}\approx 0{,}14$.

5. Нулей функция не имеет, положительна на всей числовой оси, кроме точки $x=1$.

График функции представлен на рис.12.

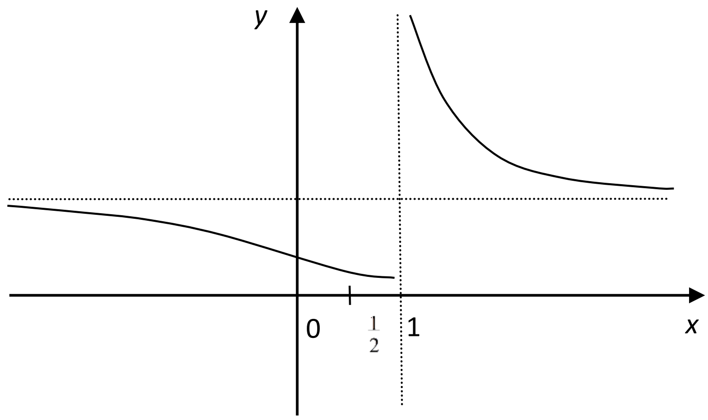


рис.12

тура:

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В трех томах. Том 1. М.: Высшая школа, 1998.

2. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. Начальный курс. М.: Изд. МГУ, 1985.

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1.: Наука, 1970.

4. Толстов Г.П. Элементы математического анализа Том 1.: Наука, 1974.

5. Никольский С.М. Курс математического анализа. Том 1.М.: Наука, 1990.

6. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1990.

7. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа М.: Наука, 1985.

8. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М., ГИФМЛ, 1963.

9. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа, Издательство «Наука», Москва, 1973.

Приложения

Приложение 1

Таблица производных

Свойства производных

I. $(Cx)' = Cx'$

II. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

III. $(uv)' = u'v + v'u$

IV. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

Формулы

1. $C' = 0$

2. $x' = 1$

3. $(x^n)' = nx^{n-1} \cdot x'$

3.1 $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{x'}{x^2}$

4. $(\cos x)' = -\sin x \cdot x'$

5. $(\sin x)' = \cos x \cdot x'$

6. $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{x'}{\cos^2 x}$

7. $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{x'}{\sin^2 x}$

8. $(\arcsin x)' = \dfrac{x'}{\sqrt{1-x^2}}$

9. $(\arccos x)' = -\dfrac{x'}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{x'}{1+x^2}$

11. $(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{x'}{1+x^2}$

12. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a \cdot x'$

12.1 $(e^x)' = e^x \cdot x'$

15. $(\log_a x)' = \dfrac{x'}{x \cdot \ln a}$

15.1 $(\ln x)' = \dfrac{x'}{x}$

17. $(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x \cdot x'$

18. $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x \cdot x'$

19. $(\mathrm{th}x)' = \dfrac{x'}{\mathrm{ch}^2 x}$

20. $(\mathrm{cth}x)' = -\dfrac{x'}{\mathrm{sh}^2 x}$

Разложение в ряд Маклорена некоторых функций:

I. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots ; -\infty < x < +\infty$.

II. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots ; -\infty < x < +\infty$.

III. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \ldots ; -\infty < x < +\infty$

IV. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n \ldots ; -1 < x < 1$.

V. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots ; -1 < x < 1$.

VI. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots ; -1 < x \le 1$

Латинский алфавит

Печатн. буквы	Название	Печатн. буквы	Название
A α	а	**N n**	эн
B b	бе	**O o**	о
C c	це	**P p**	пэ
D d	де	**Q q**	ку
E e	е	**R r**	эр
F f	эф	**S s**	эс
G g	ге	**T t**	тэ
H h	аш	**U u**	у
I i	и	**V v**	ве
J j	йот	**W w**	дубль-ве
K k	ка	**X x**	икс
L l	эль	**Y y**	игрек
M m	эм	**Z z**	зет

Греческий алфавит

Печатн. буквы	Название	Печатн. буквы	Название
Α α	альфа	**Ρ ρ**	ро
Β β	бета	**Σ σ**	сигма
Γ γ	гамма	**Τ τ**	тау
Δ δ	дельта	**Υ υ**	ипсилон
Ε ε	эпсилон	**Ι ι**	йота
Ζ ζ	дзэта	**Κ κ**$_{\chi}$	каппа
Η η	эта	**Λ λ**	ламбда
Θ θ	тэта	**Μ μ**	мю
Ν ν	ню	**Φ φ**	фи
Ξ ξ	кси	**Χ χ**	хи
Ο ο	омикрон	**Ψ ψ**	пси
Π π	пи	**Ω ω**	омега